

UJIAN AKHIR SEMESTER GANJIL TAHUN AKADEMIK 2022/2023

Mata Kuliah	: Proses Stokastik
Program Studi/Jurusan	: Statistika/Matematika
Semester/SKS	: IV/2
Hari, tanggal	: Kamis, 1 November 2022
Waktu	: 120 Menit, 13.20.00 sd. 15.20
Sifat Ujian	: Tertutup (dijinkan menggunakan kalkulator di HP)

Petunjuk :

1. Berdoalah sebelum Anda mengerjakan ujian
2. Bacalah soal dengan teliti dan cermat sebelum menjawab
3. Tulisan pada lembar jawaban harus rapi

SOAL.

1. CPMK : Mahasiswa dapat menentukan matriks peluang transisi 3 step ke depan, dan menghitung peluang yang berhubungan dengan rantai Markov, jika diberikan matriks peluang satu step ke depan

Soal :

Diketahui suatu proses rantai Markov $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$, dengan ruang state $\{0,1,2\}$ dan diketahui matriks peluang transisi satu step ke depan adalah

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix} \end{matrix}, \text{ serta } z_0 = P(X_0 = 0) = 0,2; z_1 = P(X_0 = 1) = 0,7 \text{ dan } z_2 = P(X_0 = 2) = 0,1.$$

- a. Hitunglah $P(X_3 = 0 | X_1 = 1, X_2 = 0)$
 - b. Hitunglah $P(X_3 = 0, X_2 = 0 | X_1 = 1)$
 - c. Hitunglah $P_{21}^{(3)}$ dan tentukan matrik peluang transisi 3 step ke depan, yakni $\mathbf{P}^{(3)}$
 - d. Hitunglah $P(X_3 = 0); P(X_3 = 1)$ dan $P(X_3 = 2)$
(Skor maksimum 50)
2. CPMK : Mahasiswa dapat menentukan kelas-kelas ekuivalen suatu *state* dalam suatu rantai Markov

Soal :

Selidiki apakah rantai Markov pada soal nomor 1 bersifat *irreducible*.

(Skor maksimum 25)

3. CPMK : Mahasiswa mampu menerapkan rantai Markov diskrit dan rantai Markov kontinu

Soal : Diketahui banyaknya pasien yang akan berobat ke dokter partik mengikuti distribusi Poisson dengan laju 5 pasien per jam.

- a. Hitunglah peluang jika banyaknya pasien yang datang pada 2 jam pertama adalah 1
- b. Hitunglah peluang tidak ada pasien yang datang berobat antara jam ke 2 dan ke 3 , jika diketahui banyaknya pasien datang berobat sampai jam ke 2 adalah 1.
- c. Tentukan distribusi peluang dari waktu antar kedatangan pasien ke 4 dan ke 5.

(Skor maksimum 25)

95

UNIVERSITAS MULAWARMAN
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PANITI UJIAN SEMESTER

NAMA : Joana Kriskinantyas Rahayu
NIM : 2107016023
PROG STUDI : Statistika
WUJUD : 11 Desember 2023
LOKASI : Pengantar Stokastik
KELOMPOK : V (LIMA)

1) Diketahui

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.0 \\ 0.3 & 0.0 & 0.7 \\ 0.0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

dengan $z_1 = P(X_0 = 1) = 0.3$; $z_2 = P(X_0 = 2) = 0.5$

dan $z_3 = P(X_0 = 3) = 0.2$

a) Hitunglah $P(X_3 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 2)$

Dengan menggunakan prinsip peluang bersyarat

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 2) &= \frac{P(X_3 = 1) P(X_1 = 1, X_2 = 2)}{P(X_1 = 1, X_2 = 2)} \\ &= \frac{P(X_3 = 1 | X_2 = 2) P(X_2 = 2 | X_1 = 1) P(X_1 = 1)}{P(X_2 = 2 | X_1 = 1) P(X_1 = 1)} \\ &= P(X_3 = 1 | X_2 = 2) \\ &= P_{21} \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

Jadi nilai dari $P(X_3 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 2)$ adalah 0.3

b) Hitunglah $P(X_3 = 3; X_2 = 3 | X_1 = 2)$

Dengan menggunakan prinsip peluang bersyarat

$$\begin{aligned} P(X_3 = 3; X_2 = 3 | X_1 = 2) &= \frac{P(X_3 = 3; X_2 = 3) P(X_1 = 2)}{P(X_1 = 2)} \\ &= \frac{P(X_3 = 3 | X_2 = 3) P(X_2 = 3 | X_1 = 2) P(X_1 = 2)}{P(X_1 = 2)} \\ &= P_{33} P_{23} \\ &= P_{23} P_{33} \\ &= 0.7 \times 0.2 \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $P(X_3 = 3; X_2 = 3 | X_1 = 2)$ adalah 0.14

c) Hitunglah $P_{ij}^{(3)}$ dan tentukan matriks peluang transisi 3 step ke depan yakni $P^{(3)}$

Dengan menggunakan rumus $P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} P_{ik} P_{kj}^{(n-1)}$, maka

$$\begin{aligned} P_{21}^{(3)} &= \sum_{k=1}^3 P_{2k} P_{k1}^2 \\ &= P_{21} P_{11}^2 + P_{22} P_{21}^2 + P_{23} P_{31}^2 \end{aligned}$$

Dimana nilai dari P_{21}^2 , P_{22}^2 , P_{23}^2 merupakan nilai dari matriks peluang 2 transisi yang dapat dicari menggunakan

$$\begin{aligned} P_{11}^2 &= \sum_{k=1}^3 P_{1k} P_{k1} \\ &= P_{11} P_{11} + P_{12} P_{21} + P_{13} P_{31} \\ &= 0.4 \times 0.4 + 0.6 \times 0.3 + 0.0 \times 0.0 \\ &= 0.16 + 0.18 + 0 \\ &= 0.34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{21}^2 &= \sum_{k=1}^3 P_{2k} P_{k1} \\ &= P_{21} P_{11} + P_{22} P_{21} + P_{23} P_{31} \\ &= 0.3 \times 0.4 + 0.0 \times 0.3 + 0.7 \times 0.0 \\ &= 0.12 + 0 + 0 \\ &= 0.12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{31}^2 &= \sum_{k=1}^3 P_{3k} P_{k1} \\ &= P_{31} P_{11} + P_{32} P_{21} + P_{33} P_{31} \\ &= 0.0 \times 0.4 + 0.8 \times 0.3 + 0.2 \times 0.0 \\ &= 0 + 0.24 + 0 \\ &= 0.24 \end{aligned}$$

maka nilai dari $P_{21}^{(3)}$ adalah

$$\begin{aligned} P_{21}^{(3)} &= P_{21}P_{11}^2 + P_{22}P_{21}^2 + P_{23}P_{31}^2 \\ &= 0,3 \times 0,39 + 0,0 \times 0,12 + 0,7 \times 0,29 \\ &= 0,102 + 0 + 0,168 \\ &= 0,270 \end{aligned}$$

Dan untuk matriks peluang transisi 3 step kedepan dapat dicari dengan cara berikut

$$\begin{aligned} P^3 &= P \times P^{(2)} \\ &= P \times P \times P \\ &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,0 \\ 0,3 & 0,0 & 0,7 \\ 0,0 & 0,8 & 0,2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,0 \\ 0,3 & 0,0 & 0,7 \\ 0,0 & 0,8 & 0,2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,0 \\ 0,3 & 0,0 & 0,7 \\ 0,0 & 0,8 & 0,2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,208 & 0,540 & 0,252 \\ 0,270 & 0,184 & 0,546 \\ 0,144 & 0,624 & 0,232 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, nilai untuk $P_{21}^{(3)}$ adalah 0,270 dan matriks peluang transisi 3 step kedepan adalah P^3

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0,208 & 0,540 & 0,252 \\ 0,270 & 0,184 & 0,546 \\ 0,144 & 0,624 & 0,232 \end{bmatrix}$$

dimana dapat kita lihat bahwa hasil perhitungan $P_{21}^{(3)}$ sama dengan nilai $P_{21}^{(2)}$ pada matriks P^3 yaitu 0,270

d) Hitunglah $P(X_3 = 3)$; $P(X_3 = 1)$ dan $P(X_3 = 2)$

Kita ketahui bahwa $\pi_0^{(3)} = P(X_0 = 1)$; $\pi_2^{(3)} = P(X_0 = 2)$ dan $\pi_3^{(3)} = P(X_0 = 3)$ maka kita dapat mengetahui nilai masing-masing $\pi_1^{(3)}$; $\pi_2^{(3)}$ dan $\pi_3^{(3)}$ dengan cara berikut

$$\begin{aligned} \pi^{(3)} &= \pi^0 \cdot P^{(3)} \\ &= \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,208 & 0,540 & 0,252 \\ 0,270 & 0,184 & 0,546 \\ 0,144 & 0,624 & 0,232 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,208 & 0,540 & 0,252 \\ 0,270 & 0,184 & 0,546 \\ 0,144 & 0,624 & 0,232 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,2262 & 0,3788 & 0,3950 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

maka nilai dari $\pi_1^{(3)} = 0,2262$; $\pi_2^{(3)} = 0,3788$ dan $\pi_3^{(3)} = 0,3950$

3) Diketahui : Distribusi poisson = $\frac{e^{-\lambda} \cdot (\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0, 1, \dots, N$

• $\lambda = 4$ pasien/jam

a) Hitunglah peluang jika banyaknya pasien yang datang pada 2 jam pertama adalah 1 jika diketahui $t = 2$ dan $s = 0$, maka

$$P[N(t+s) - N(s) = k] = P[N(2+0) - N(0) = 1]$$

$$= \frac{e^{-4} \cdot (4(2))^1}{1!}$$

$$= e^{-4} \cdot (8)$$

$$= 0.1465251$$

Jadi, peluang pasien yang datang pada 2 jam pertama adalah 1 sebesar 0.1465251,

b) Hitunglah peluang tidak ada pasien yang datang berobat antara jam ke dan ke 3, jika diketahui banyaknya pasien datang berobat sampai jam ke 2 adalah 1.

Jika diketahui $t = 3$ dan $s = 2$, maka

$$P[N(t) - N(s) = 0, P(N(s) = 1)] = P[N(3) - N(2) = 0 \mid N(2) = 1] \longrightarrow N(t) - N(s) = N(t-s)$$

$$= P[N(1) = 0 \mid N(2) = 1]$$

$$= \frac{P(N(1) = 0) \cdot P(N(2) = 1)}{P(N(2) = 1)}$$

$\longrightarrow$ Peluang bersyarat saling bebas

$$= P(N(1) = 0)$$

$$= \frac{e^{-4} (4(1))^0}{0!}$$

$$= e^{-4}$$

$$= 0.018316$$

Jadi, peluang tidak adanya pasien antara jam ke-2 dan ke-3 ketika pasien yang datang pada jam ke-2 adalah 1 pasien sebesar 0.018316,

c) Tentukan distribusi peluang dari waktu antar kedatangan pasien ke-4 dan ke-5

Jika diketahui $\lambda = 4$ pasien/jam, maka distribusi peluang waktu antar kedatangan adalah distribusi Poisson dengan $P[(N(s+t) - N(s)) = t]$

$$P[(N(s+t) - N(s)) = t] = P[N(4+5) - N(4) = 5] \\ = P[N(5)]$$

~~Maka dari itu~~ Maka dari itu : $\lambda = 4$

$$E(N(t)) = \text{var}(N(t))$$

$$= \lambda t$$

$$= 4 \cdot 5$$

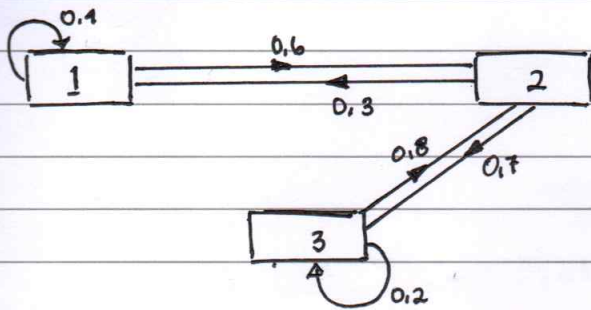
$$= 20$$

Maka $N(5) \sim \text{Pos}(20)$

Jadi distribusi peluang dari waktu antar kedatangan adalah distribusi poisson dengan $N(5) \sim \text{Pos}(20)$

NAMA : Joana Kristinantiyis Rahayu
NIM : 2107016023
PROG STUDI : Statistika
TANGGAL : 11 Des 2023
MATA KULIAH : Pengantar Stokastik
SEMESTER : V (LIMA)

2) a. Tuliskan diagram peluang transisi rantai Markov pada soal nomor 1!



b. Tentukan orde dari P_{12} , P_{13} dan P_{22}

orde $P_{12} =$	2	Jadi orde dari $P_{12} = 2$; $P_{13} = 1$ dan P_{22} orde $P_{22} = 2$ //
orde $P_{13} =$	1	
orde $P_{22} =$	2	

c. Tentukan kelas-kelas ekuivalen state rantai Markov pada soal nomor 1

- $1 \leftrightarrow 2$, karena $P_{12} = 0.6 > 0$ dan $P_{21} = 0.3 > 0$ | Jadi kelas ekuivalen yang terbentuk adalah $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$
- $2 \leftrightarrow 3$, karena $P_{23} = 0.7 > 0$ dan $P_{32} = 0.8 > 0$ | dan $\{1, 2, 3\}$
- $1 \leftrightarrow 3$, karena $P_{12} = 0.6 > 0$, $P_{23} = 0.7 > 0$, $P_{32} = 0.8 > 0$ dan $P_{11} = 0.4 > 0$

d. Selidiki apakah rantai Markov state 2 recurrent?

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.34 & 0.24 & 0.42 \\ 0.12 & 0.74 & 0.14 \\ 0.24 & 0.16 & 0.60 \end{bmatrix}$$

e. Selidiki apakah rantai markov pada soal nomor 1 bersifat irreducible (berikan alasannya)

Sifat irreducible merupakan sifat pada rantai Markov dimana masing-masing peluang transisi pada matriks saling berkomunikasi atau berhubungan. Namun pada rantai Markov soal nomor 1, peluang transisi saling berhubungan dimana p_1 dan p_2 serta p_2 dan p_3 berkomunikasi secara langsung dan p_1 dan p_3 berkomunikasi melalui p_2 . Maka dapat disimpulkan bahwa rantai Markov pada soal nomor 1 adalah irreducible