

**ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA MODEL *PREDATOR-PREY*
DENGAN PENGARUH EFEK ALLEE, PERLINDUNGAN *PREY*
DAN PENAMBAHAN VARIABEL PEMANENAN *PREDATOR***

SKRIPSI



**Taqriri Kamal Mulyadi
NIM 1907066007**

**PROGRAM STUDI S1 MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS MULAWARMAN
SAMARINDA
2023**

**ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA MODEL *PREDATOR-PREY*
DENGAN PENGARUH EFEK ALLEE, PERLINDUNGAN *PREY*
DAN PENAMBAHAN VARIABEL PEMANENAN *PREDATOR***

SKRIPSI

**Diajukan kepada
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Mulawarman untuk memenuhi sebagian persyaratan
memperoleh gelar Sarjana Matematika**

**Oleh:
Taqriri Kamal Mulyadi
NIM 1907066007**

**PROGRAM STUDI S1 MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS MULAWARMAN
SAMARINDA
2023**

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi Sarjana berjudul **Analisis Bifurkasi Hopf pada Model *Predator-Prey* dengan Pengaruh Efek Allee, Perlindungan *Prey* dan Penambahan Variabel Pemanenan *Predator*** oleh **Taqirri Kamal Mulyadi** telah dipertahankan di depan Dewan Penguji pada tanggal 30 November 2023.

SUSUNAN TIM PEMBIMBING

Menyetujui,

Pembimbing I,



Wasono, S.Si., M.Si.

NIP 19810712 202321 1 011

Pembimbing II,



Moh. Nurul Huda, S.Si., M.Si.

NIP 19900627 202203 1 004

Mengetahui,

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Mulawarman



Dr. Dra. Hj. Ratna Kusuma, M.Si.

NIP 19630416 198903 2 001

SKRIPSI INI TELAH DIUJI DAN DINYATAKAN LULUS

Judul Skripsi : Analisis Bifurkasi Hopf pada Model *Predator-Prey* dengan Pengaruh Efek Allee, Perlindungan *Prey* dan Penambahan Variabel Pemanenan *Predator*

Nama : Taqiri Kamal Mulyadi

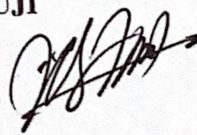
NIM : 1907066007

Hari : Kamis

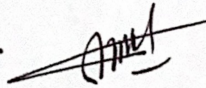
Tanggal Ujian : 30 November 2023

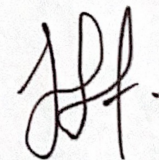
TIM PENGUJI

1. Wasono, M.Si.
NIP. 19810712 202321 1 011
2. Moh. Nurul Huda, M.Si.
NIP. 19900627 202203 1 004
3. Asmaidi, S.Pd., M.Si.
NIP. 19740112 200012 1 002
4. Indriasri Raming, M.Si.
NIP. 19860817 202203 2 006

1. 

2. 

3. 

4. 

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan ini saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa dalam Skripsi yang berjudul **"Analisis Bifurkasi Hopf pada Model Predator-Prey dengan Pengaruh Efek Allee, Perlindungan Prey dan Penambahan Variabel Pemanenan Predator"** tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar Sarjana di suatu perguruan tinggi mana pun. Sepanjang pengetahuan saya, tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan sebenar-benarnya. Saya sanggup menerima konsekuensi akademik di kemudian hari apabila pernyataan yang dibuat ini tidak benar.

Samarinda, 30 November 2023



Tagriri Kamal Mulyadi

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN
PUBLIKASI KARYA ILMIAH**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

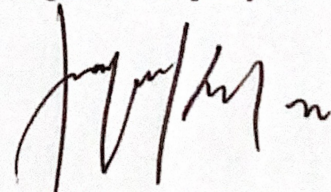
Nama : Taqriri Kamal Mulyadi
NIM : 1907066007
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Analisis Bifurkasi Hopf pada Model *Predator-Prey* dengan
Pengaruh Efek Allee, Perlindungan *Prey* dan Penambahan
Variabel Pemanenan *Predator*

Menyatakan bahwa saya setuju untuk memberikan hal penyimpanan, mengalih
mediakan/mengalih formatkan, pengelola dalam bentuk pengakalan data
(*database*), mempublikasikan untuk kepentingan akademik UPT. Perpustakaan
Universitas Mulawarman tanpa perlu permintaan izin dari saya selama tetap
mencantumkan nama saya sebagai penulis/pencipta.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sesungguhnya dan dapat digunakan
sebagaimana mestinya.

Samarinda, 30 November 2023

Yang membuat pernyataan



Taqriri Kamal Mulyadi

NIM 1907066007

ABSTRAK

Penelitian ini membahas dinamika dari model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan pemanenan *predator*. Laju pertumbuhan *prey* mengikuti model logistik. Efek Allee pada model terjadi pada laju pertumbuhan populasi *prey*. Interaksi antara *predator-prey* menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Pada model tersebut dilakukan analisis dinamik yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan, analisis bifurkasi Hopf, titik kesetimbangan bionomik dan kontrol pemanenan optimal. Hasil analisis memperlihatkan bahwa terdapat tiga titik kesetimbangan, yaitu titik kepunahan kedua populasi (E_0), titik kepunahan *predator* ($E^\pm$), dan titik eksistensi kedua populasi (E^*). Sifat kestabilan lokal titik kesetimbangan tersebut dianalisis dengan melakukan linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan. Ketiga titik kesetimbangan ini bersifat stabil dengan kondisi tertentu. Bifurkasi Hopf dianalisis di titik kesetimbangan E^* terhadap parameter bifurkasi Λ yang mewakili parameter pemanenan *predator*. Titik kesetimbangan bionomik eksis jika keuntungan pemanenan lebih besar daripada biaya pemanenan. Kontrol pemanenan optimal dianalisis dengan memanfaatkan prinsip maksimum Pontryagin untuk mengoptimalkan keuntungan dengan tetap menjaga kelestarian ekosistem. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk mengilustrasikan dan untuk menguji hasil analisis yang telah diperoleh. Simulasi numerik menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis pada model *predator-prey*.

Kata Kunci: bifurkasi Hopf, efek Allee, kesetimbangan bionomik, kestabilan, kontrol optimal, model ekologi, pemanenan, perlindungan.

ABSTRACT

This research discusses the dynamics of a predator-prey model with the influence of Allee effect, prey refuge, and predator harvesting. The growth rate of prey follows the logistic model. The Allee effect in this model occurs in the population growth rate of prey. The interaction between predator and prey is described using the Holling type II response function. Dynamical analysis performed on the model includes determination of equilibrium, local stability analysis of equilibrium, Hopf bifurcation analysis, bionomic equilibrium points, and optimal harvesting control. The analysis results show that there are three equilibrium points: the extinction of both populations (E_0), the extinction of the predator ($E^\pm$), and the coexistence of both populations (E^). The local stability of the equilibrium points is analyzed by linearizing the system around the equilibrium points. All three equilibrium points are stable under certain conditions. The Hopf bifurcation is analyzed at the equilibrium point E^* with respect to the bifurcation parameter Δ , which represents the predator harvesting parameter. The bionomic equilibrium points exists if the harvesting profit is greater than the harvesting cost. The optimal harvesting policy is analyzed using the Pontryagin's maximum principle to optimize the benefit while maintaining the sustainability of the ecosystem. Finally, numerical simulations are conducted to illustrate and test the obtained analytical results. Numerical simulations show consistency with the analytical results in the predator-prey model.*

Keywords: *Allee effect, bionomic equilibrium, ecological model, harvesting, Hopf bifurcation, optimal control, refuge, stability*

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT, Tuhan semesta alam, atas limpahan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyusun naskah skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW, segenap keluarga, sahabat, serta umatnya hingga akhir zaman. Sehingga penulis dapat menyusun skripsi ini dengan judul “Analisis Bifurkasi Hopf pada Model *Predator-Prey* dengan Pengaruh Efek Allee, Perlindungan *Prey* dan Penambahan Variabel Pemanenan *Predator*”.

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat hormat kepada:

1. Ibu Dr. Hj. Ratna Kusuma, M.Si, selaku Dekan Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman, Samarinda.
2. Bapak Dr. Syaripuddin, M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Matematika, dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman, Samarinda.
3. Ibu Qonita Qurrota A'yun. S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika, Fakultas Matematika, dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman, Samarinda.
4. Bapak Wasono, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Bapak Moh. Nurul Huda, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak meluangkan waktu dan memberikan banyak bimbingan, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini.
5. Bapak Asmaidi, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan Ibu Indriasri Raming, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk menguji, memberikan saran dan masukan, sehingga penulis dapat menyempurnakan penulisan skripsi ini.
6. Kedua orang tua dan keluarga yang selalu mendoakan, memberikan semangat dan dukungan selama proses penyusunan skripsi ini.
7. Teman-teman mahasiswa angkatan 2019 pada Program Studi Matematika yang saling membantu dan memberi dukungan satu sama lain.
8. Semua pihak yang telah membantu dan mendukung penulis, namun tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa penyusunan naskah skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari para pembaca demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat menambah wawasan, pengetahuan, serta bermanfaat bagi para pembaca dan kepada pihak-pihak berkepentingan lainnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Samarinda, 30 November 2023

Taqiriri Kamal Mulyadi

DAFTAR ISI

ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
DAFTAR SIMBOL.....	xv
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Batasan Masalah	4
1.3 Rumusan Masalah.....	4
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	5
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA.....	6
2.1 Persamaan Diferensial	6
2.2 Sistem Dinamik	7
2.2.1 Sistem <i>Autonomous</i>	7
2.2.2 Sistem <i>Autonomous</i> linear	8
2.2.3 Sistem <i>Autonomous nonlinear</i>	9
2.3 Bifurkasi Hopf.....	11
2.4 Model Pertumbuhan Logistik.....	14
2.5 Model <i>Predator-Prey</i>	15
2.6 Fungsi Respon Holling.....	15
2.6.1 Fungsi Respon Holling Tipe I.....	16
2.6.2 Fungsi Respon Holling Tipe II.....	17
2.6.3 Fungsi Respon Holling Tipe III.....	17
2.7 Efek Perlindungan <i>Prey</i>	18
2.8 Efek Allee	18
2.9 Model <i>Predator-Prey</i> dengan Pengaruh Perlindungan dan Efek Allee pada Populasi <i>prey</i>	20
2.10 Pemanenan	20

2.11 Model Bionomik	21
2.12 Prinsip Maksimum Pontryagin	21
BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN	23
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian.....	23
3.2 Tahapan Penelitian	23
3.3 Bagan Alir Penelitian	24
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN.....	26
4.1 Model <i>Predator-Prey</i> dengan Pengaruh Efek Allee, Perlindungan <i>Prey</i> dan Pemanenan <i>Predator</i>	26
4.2 Titik Keseimbangan Model	27
4.2.1 Titik Keseimbangan E_0	28
4.2.2 Titik Keseimbangan $E^\pm$	28
4.2.3 Titik Keseimbangan E^*	29
4.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	31
4.3.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan E_0	32
4.3.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan $E^\pm$	33
4.3.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan E^*	35
4.4 Analisis Bifurkasi Hopf	37
4.5 Titik Keseimbangan Bionomik	41
4.6 Kontrol Optimal Pemanenan	43
4.7 Simulasi Numerik	48
4.7.1 Simulasi Numerik Kestabilan Titik Keseimbangan E_0	50
4.7.2 Simulasi Numerik Kestabilan Titik Keseimbangan $E^\pm$	51
4.7.3 Simulasi Numerik Kestabilan titik Keseimbangan E^*	53
4.7.4 Simulasi Bifurkasi Hopf	56
4.7.5 Simulasi Titik Keseimbangan Bionomik	57
4.7.6 Simulasi Kontrol Optimal Pemanenan	59
BAB 5 PENUTUP	60
5.1 Kesimpulan	60
5.2 Saran	61
DAFTAR PUSTAKA.....	62
LAMPIRAN	65
DAFTAR RIWAYAT HIDUP	79

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Titik kesetimbangan dan syarat-syaratnya	36
Tabel 4.2	Nilai-nilai parameter dan satuannya	49
Tabel 4.3	Eksistensi titik kesetimbangan bionomik dengan parameter efek Allee yang berbeda	58
Tabel 4.4	Eksistensi titik kesetimbangan bionomik dengan nilai ξ yang berbeda	58
Tabel 4.5	Kontrol optimal pemanenan <i>predator</i> dengan tingkat diskon δ yang berbeda	59

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Bifurkasi Hopf <i>supercritical</i> . (a) $\mu < \mu_{cr}$, (b) $\mu = \mu_{cr}$, (c) $\mu > \mu_{cr}$	13
Gambar 2.2	Bifurkasi Hopf <i>subcritical</i> . (a) $\mu < \mu_{cr}$, (b) $\mu = \mu_{cr}$, (c) $\mu > \mu_{cr}$	13
Gambar 2.3	(a) Fungsi Respon Tipe I, (b) Fungsi Respon Tipe II, (c) Fungsi Respon Tipe III	16
Gambar 3.1	Kerangka Penelitian	25
Gambar 4.1	Interaksi antara <i>prey</i> dan <i>predator</i>	27
Gambar 4.2	Potret fase model <i>predator-prey</i>	50
Gambar 4.3	Potret fase model <i>predator-prey</i> di titik E_0	51
Gambar 4.4	Potret fase model <i>predator-prey</i> di titik E^-	52
Gambar 4.5	Potret fase model <i>predator-prey</i> di titik E^+	52
Gambar 4.6	Simulasi deret waktu <i>prey</i> (x) dan <i>predator</i> (y) terhadap waktu (t) dengan parameter pada Tabel 4.2 di titik $E^\pm$	53
Gambar 4.7	Potret fase model <i>predator-prey</i> di titik E_1^*	54
Gambar 4.8	Potret fase model <i>predator-prey</i> di titik E_2^*	54
Gambar 4.9	Potret fase model <i>predator-prey</i> di titik E_3^*	55
Gambar 4.10	Simulasi deret waktu <i>prey</i> (x) dan <i>predator</i> (y) terhadap waktu (t) dengan parameter pada Tabel 4.2 di titik E^*	55
Gambar 4.11	Potret fase munculnya <i>limit cycle</i> pada sistem dengan $\Lambda = 0.00391$	56
Gambar 4.12	Simulasi deret waktu model <i>predator-prey</i> terhadap waktu dengan $\Lambda = 0.00391$	57

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Uji parameter syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan	66
Lampiran 2 Bilangan Lyapunov η	68
Lampiran 3 Perhitungan titik kesetimbangan bionomik	72
Lampiran 4 Kontrol pemanenan optimal	73
Lampiran 5 Program MATLAB bifurkasi Hopf di titik E_3^* dengan $\Lambda =$ 0.00391	77

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Arti
$\mathbb{C}$	Himpunan semua bilangan kompleks
$\mathbb{R}$	Himpunan semua bilangan riil
$\mathbb{Z}$	Himpunan semua bilangan bulat
x^*	Titik kesetimbangan
J	Matriks Jacobi
I	Matriks Identitas
x	Jumlah populasi <i>prey</i>
y	Jumlah populasi <i>predator</i>
t	Waktu
r	Laju pertumbuhan populasi <i>prey</i>
K	Daya dukung lingkungan
P	Kepadatan populasi pertumbuhan logistik
F_1	Fungsi respon Holling tipe I
F_2	Fungsi respon Holling tipe II
F_3	Fungsi respon Holling tipe III
τ	Derajat efek Allee (kuat jika $\tau > \varphi$)
φ	Derajat efek Allee (lemah jika $\tau < \varphi$)
β	Tingkat konsumsi <i>prey</i> oleh <i>predator</i>
ξ	Perlindungan <i>prey</i>
α	Tingkat kejenuhan <i>prey</i>
E	Efisiensi konversi
ψ	Tingkat kematian alami <i>predator</i>
a	Daya tangkap <i>predator</i>
Λ	Pemanenan <i>predator</i>

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Arti
p	Harga jual per unit <i>predator</i>
b	Biaya pemanenan <i>predator</i>
ζ	Pendapatan bersih hasil pemanenan <i>predator</i>
H	Fungsi Hamiltonian
η	Bilangan Lyapunov
e	Bilangan Euler, $e = 2.718281 \dots$
π	Rasio keliling lingkaran pada diameter, $\pi = 3.141592 \dots$
i	Bilangan imajiner, $i = \sqrt{-1}$
λ	Nilai eigen
Δ	Determinan
μ_i	Variabel adjoin
δ	Tingkat diskon tahunan
■	<i>quod erat demonstrandum</i>

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pemodelan matematika merupakan cabang ilmu matematika yang merepresentasikan atau menjelaskan masalah di kehidupan nyata kedalam bentuk matematika. Pemodelan matematika biasanya selalu dikaitkan dengan cabang ilmu yang lain seperti biologi, fisika, kesehatan, dan teknik (Kant dan Kumar, 2017). Salah satu cabang ilmu biologi adalah ekologi. Ekologi adalah ilmu yang mempelajari makhluk hidup dan interaksinya terhadap lingkungan maupun interaksi dengan sesama makhluk hidup (Reece dan Campbell, 2011).

Pemodelan Matematika dalam bidang Ekologi adalah proses pembuatan representasi matematis dari sistem ekologi, seperti populasi spesies, ekosistem, dan interaksi antar spesies. Tujuan dari pemodelan matematika ekologi adalah untuk memahami dan memprediksi perilaku sistem ekologi, seperti dinamika populasi, interaksi antar spesies, dan respon terhadap perubahan lingkungan (Odenbaugh, 2019). Hubungan dinamis antara *predator-prey* adalah salah satu tema dominan dalam ekologi karena keberadaannya yang universal dan penting, dengan interaksi *predator-prey* salah satu masalah yang paling banyak dipelajari dalam ekologi dan literatur matematika (Molla dkk., 2022).

Model *predator-prey* merupakan salah satu model interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem, dengan *prey* sebagai spesies yang dimangsa dan *predator* sebagai spesies yang memangsa. Model ini sangat populer yang dibuktikan dengan banyaknya penelitian yang mempelajari model ini. Batasan dari model ini sangat luas sehingga banyak peneliti melakukan modifikasi dan mengembangkan model *predator-prey* dengan harapan model tersebut bersesuaian dengan kondisi yang ada di alam (Arsyad dkk., 2020).

Perlindungan *prey* berperan penting untuk memastikan kestabilan sistem ekologi. Dalam sistem ekologi, setiap spesies memiliki peran dan fungsi tertentu, dan predasi adalah bagian alami dari siklus hidup. Namun, jika tidak dikelola dengan baik, predasi dapat mempengaruhi kestabilan sistem ekologi. Jika spesies *prey* tidak dilindungi, populasinya mungkin akan menurun dan mempengaruhi

kestabilan sistem ekologi secara keseluruhan. Jika populasi *predator* terlalu besar dan tidak memiliki sumber daya yang cukup, mereka akan memburu spesies lain untuk memenuhi kebutuhan nutrisi mereka. Ini akan mempengaruhi kestabilan sistem ekologi karena spesies lain mungkin akan memiliki populasi yang menurun dan mempengaruhi siklus hidup lain dalam sistem ekologi. Salah satu cara perlindungan standar adalah dengan mengurangi tingkat pertemuan antara *predator* dan *prey* (Hassel, 1978).

Efek Allee adalah suatu konsep yang menggambarkan bagaimana persebaran individu dalam suatu populasi dapat mempengaruhi kemampuan populasi untuk bertahan dan berkembang biak. Efek Allee merupakan penurunan laju pertumbuhan populasi di kepadatan rendah yang dihasilkan oleh beberapa mekanisme. Pencetus dari fenomena tersebut adalah Clyde Warder Allee (1885 - 1955), *zoologist* Universitas Chicago dan ekologi hewan, khususnya pada kelompok perilaku hewan. Allee, seorang pengamat perilaku hewan, melihat bahwa kerjasama antar individu memiliki efek positif pada kelangsungan hidup. Interaksi positif antara individu-individu pada populasi yang memiliki kepadatan rendah dikenal sebagai efek Allee, dan hubungan ini menjadi krusial bagi kelangsungan hidup dan reproduksi individu tersebut (Courchamp dkk., 1999). Efek Allee dapat terlihat dalam berbagai spesies, termasuk hewan dan tumbuhan (Allee, 1931). Secara umum, efek Allee disebabkan oleh berbagai faktor biologis seperti berkurangnya pertahanan terhadap predator, kompetisi intraspesifik, penyimpangan genetik, kesulitan mendapatkan pasangan, disfungsi sosial dan kekurangan pakan hingga mengakibatkan populasi mengalami kepadatan rendah (Ra'yan dkk., 2022). Pada dasarnya, efek Allee memiliki pengaruh yang besar terhadap pergerakan dinamika populasi yang kompleks dari beberapa spesies yang interaktif. Dalam studi ekologi, memahami dampak dari efek Allee memainkan peran penting karena efek Allee dapat meningkatkan kemungkinan kepunahan lokal dan global. Efek Allee juga mempengaruhi hubungan dinamik *predator-prey* dengan cara yang kompleks dan berbeda-beda. Penting untuk mempertimbangkan bagaimana efek Allee mempengaruhi kedua sisi dalam hubungan *predator-prey* agar dapat memahami bagaimana efek ini mempengaruhi kestabilan sistem ekologi secara keseluruhan (Stephens dan Sutherland, 1999).

Meningkatnya kebutuhan manusia akan makanan, keuntungan ekonomi dan lebih banyak lagi telah menyebabkan peningkatan eksploitasi sumber daya alam. Perkembangan ekonomi dan keseimbangan ekologi selalu memiliki kepentingan yang saling bertentangan. Oleh karena itu, terkait konservasi untuk manfaat jangka panjang, ada berbagai kepentingan dalam penggunaan pemodelan bionomik untuk mendapatkan wawasan yang lebih luas dalam manajemen ilmiah sumber daya. Pemanenan adalah salah satu masalah yang paling penting untuk mengendalikan kepunahan dan meminimalkan eksploitasi sumber daya. Kontrol pemanenan adalah salah satu masalah utama dan menarik dari sudut pandang ekologi dan ekonomi (Haque dan Sarwardi, 2018).

Kajian mengenai model *predator-prey* telah banyak dibahas oleh para peneliti. Cai dkk. (2015) mengkaji model Leslie–Gower *predator-prey* dengan efek Allee aditif. Belkhodja dkk. (2018) mengkaji pemanenan optimal dan kestabilan model *predator-prey*. Zhou dkk. (2019) mengkaji bifurkasi Hopf pada model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling-II dan perlindungan *prey*. Ang dkk. (2019) mengkaji dampak pemanenan terhadap *predator-prey* model perikanan bioekonomik yang terkena racun lingkungan. Berbeda dari penelitian sebelumnya, Molla dkk. (2020) mengkaji studi dinamis dari model *predator-prey* yang menggabungkan perlindungan *prey* nonlinier dan efek Allee aditif yang bekerja pada spesies *prey*. Selain itu, Mezouaghi dkk. (2022) telah meneliti mengenai analisis bifurkasi model *predator-prey* difusi dengan perilaku sosial *prey* dan pemanenan *predator*.

Berdasarkan masalah yang telah disebutkan dan beberapa penelitian sebelumnya, penulis akan mengkaji bagaimana efek Allee, perlindungan *prey* dan pemanenan *predator* mempengaruhi dinamika populasi *predator-prey*. Adapun model dalam penelitian ini mengacu pada penelitian model *predator-prey* pada penambahan variabel perlindungan *prey* dan efek Allee yang dikembangkan oleh (Molla dkk., 2022). Model dalam penelitian ini dikembangkan dengan menambahkan variabel pemanenan pada populasi *predator*. Berdasarkan penjelasan yang telah diuraikan, akan dilakukan penelitian tentang **”Analisis Bifurkasi Hopf pada Model Predator-Prey dengan Pengaruh Efek Allee, Perlindungan Prey dan Penambahan Variabel Pemanenan Predator”**.

1.2 Batasan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang maka penulis membatasi permasalahan dalam penelitian hanya menganalisis model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan pemanenan pada populasi *predator*.

1.3 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, permasalahan yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana eksistensi titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*?
2. Bagaimana hasil analisis kesetabilan titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*?
3. Bagaimana hasil analisis bifurkasi Hopf model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*?
4. Bagaimana eksistensi titik kesetimbangan bionomik pada model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*?
5. Bagaimana kontrol optimal pemanenan *predator* pada model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*?
6. Bagaimana hasil simulasi numerik model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*?

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan sebagai berikut:

1. Memperoleh eksistensi titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*.

2. Mengetahui analisis kestabilan titik kesetimbangan model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*.
3. Mengetahui analisis bifurkasi hopf pada model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*.
4. Memperoleh eksistensi titik kesetimbangan bionomik pada model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*?
5. Mengetahui kontrol optimal pemanenan *predator* pada model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*?
6. Mengetahui simulasi numerik pada model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Secara umum diharapkan dapat memberikan sumbangan terhadap perkembangan ilmu pengetahuan serta untuk menambah wawasan pengetahuan dalam bidang matematika terapan terutama dalam bidang matematika ekologi.
2. Secara khusus memberikan gambaran tentang analisis dinamik dari model *predator-prey* dengan pengaruh perlindungan *prey*, efek Allee, dan pemanenan pada populasi *predator*.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan yang melibatkan fungsi yang tidak diketahui. Berdasarkan banyaknya variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa memuat satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial memuat lebih dari satu variabel bebas.

Orde dari persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari turunan yang ada pada suatu persamaan. Secara umum persamaan diferensial biasa orde n , dapat dinyatakan sebagai

$$F[t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)] = 0, \quad (2.1)$$

dengan t merupakan variabel bebas, x merupakan variabel tak bebas, dan $x^{(n)}$ menyatakan turunan ke- n dari x terhadap t . Untuk memudahkan penulisan persamaan diferensial, digunakan notasi y untuk menyatakan $x(t)$ dan $y', y'', \dots, y^{(n)}$ untuk menyatakan $x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)$, sehingga persamaan (2.1) dapat ditulis

$$F[t, y, y', \dots, y^{(n)}] = 0. \quad (2.2)$$

Persamaan diferensial biasa (2.2) dikatakan linear jika F adalah fungsi linear dari variabel $y, y', \dots, y^{(n)}$. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linear orde ke- n adalah

$$a_0(t)y^n + a_1(t)y^{n-1} + \dots + a_n(t)y = g(t), \quad (2.3)$$

dengan $a \neq 0$. Persamaan diferensial yang tidak memenuhi bentuk (2.3) disebut persamaan diferensial biasa nonlinear

(Boyce dan DiPrima, 2008).

2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah sistem yang senantiasa berubah dan situasi di masa yang akan datang dapat diketahui apabila situasi saat ini atau situasi di masa lalu diketahui (Nagle dkk., 2012). Sistem dinamik dibedakan menjadi dua, yaitu sistem dinamik kontinu dan sistem dinamik diskret. Sistem dinamik diskret memiliki bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

dan sistem dinamik kontinu memiliki bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t), t \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

(Alligood dkk., 2000).

2.2.1 Sistem *Autonomous*

Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

dengan fungsi $f(\vec{x})$ fungsi kontinu dan tidak bergantung secara eksplisit pada variabel bebas t disebut sebagai sistem *autonomous* (Boyce dan DiPrima, 2008). Sistem persamaan *autonomous* berdasarkan kelinearannya terbagi menjadi dua, yaitu sistem persamaan diferensial *autonomous* linear dan persamaan diferensial *autonomous* non linear.

Definisi 2.1 (Boyce dan DiPrima, 2008) Titik $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ yang memenuhi $f_i(\vec{x})$ disebut **titik kritis** sistem (2.6). Titik kritis $\vec{x}^*$ merupakan solusi sistem (2.6) yang bernilai konstan karena $\frac{df_i(\vec{x})}{dt} = 0$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{df_i(\vec{x})}{dt} = 0$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhi disebut titik kesetimbangan, sehingga titik kritis disebut juga titik kesetimbangan

Definisi 2.2 (Boyce dan DiPrima, 2008) *Titik kesetimbangan* $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ dikatakan:

1. *stabil*, jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\vec{x}(t)$ sistem (2.6) pada saat $t = 0$ memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

2. *stabil asimtotik*, jika $\vec{x}^*$ stabil dan $\exists \delta_0 > 0$ sedemikian sehingga jika terdapat suatu solusi $\vec{x}^*$ sistem (2.6) memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta_0,$$

akan berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. *tidak stabil*, apabila tidak memenuhi kriteria stabil.

2.2.2 Sistem Autonomous linear

Diberikan sistem *autonomos* linear berdimensi n sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{2.7}$$

dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \tag{2.8}$$

dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Jika $\det(A) \neq 0$,

maka $\vec{x} = 0$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan sistem (2.8). Kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.8) dapat ditentukan dengan menggunakan teorema berikut.

Teorema 2.3 (Finizio dan Ladas, 1982) *Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = 0$ sistem (2.8) bersifat*

1. *stabil, jika dan hanya jika seluruh nilai eigen matriks A memiliki bagian real tak positif,*
2. *stabil asimtotik, jika dan hanya jika seluruh nilai eigen matriks A memiliki bagian real negatif, dan*
3. *tidak stabil, jika terdapat nilai eigen matriks A memiliki bagian real positif.*

2.2.3 Sistem Autonomous nonlinear

Diberikan sistem otonomus nonlinear berdimensi n sebagai berikut

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}), i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.9)$$

dengan f_i merupakan fungsi nonlinear. Misal $\vec{x}^*$ adalah titik kesetimbangan sistem (2.9). Jika fungsi f_i mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik $\vec{x}^*$, maka deret Taylor fungsi f_i disekitar titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ adalah

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = & f_i(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) \\ & + \dots + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \eta_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.10)$$

dengan $\eta_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah suku sisa $i = 1, 2, \dots, n$. Hampiran orde satu terhadap f_i menghasilkan suku sisa yang memenuhi sifat

$$\lim_{x_i \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\eta_i x_i}{\|\vec{u}\|} = 0,$$

dimana $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, dengan $u_i = x_i - x_i^*$.

Dengan menggunakan persamaan (2.10) dan mengingat

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{d}{dt}(x_i - x_i^*),$$

maka persamaan (2.10) dapat ditulis ke dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^*) \\ f_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\vec{x}) \\ \eta_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \eta_n(\vec{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Karena $f_i(\vec{x}^*) = 0$, maka persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai,

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Dengan matriks Jacobian $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$, maka persamaan

(2.12) dapat ditulis sebagai,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = J\vec{u} + \vec{\eta}.$$

Jika x_i berada dekat dengan $\vec{x}^*$, maka $\vec{\eta}$ bernilai kecil, sehingga $\vec{\eta} \rightarrow 0$. Oleh karena itu $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.9) dapat dihamperi oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = J\vec{u}. \quad (2.13)$$

Untuk $x_i = x_i^*$ diperoleh $\vec{u} = \vec{0}$ sehingga sistem linear (2.13) memiliki titik kesetimbangan $\vec{x} = \vec{0}$. Selanjutnya kestabilan titik kesetimbangan sistem nonlinear akan bergantung pada kestabilan titik kesetimbangan hasil linearisasi.

(Boyce dan DiPrima, 2008)

Teorema 2.4 (Finizio dan Ladas, 1982) *Titik kesetimbangan $\vec{x}^*$ sistem autonomous nonlinear (2.9) bersifat:*

1. *stabil asimtotik, jika titik kesetimbangan hasil linearisasi stabil asimtotik.*
2. *tak stabil, jika titik kesetimbangan hasil linearisasi tak stabil.*

Teorema 2.5 (Brauer dan Chavez, 2012) *Misalkan sistem (2.9) hanya memiliki dua kompartemen $\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$ dan $\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$. Jika (x_1^*, x_2^*) adalah titik kesetimbangan sistem (2.9) dan jika semua nilai eigen dari matriks koefisien linearisasi pada titik kesetimbangan (x_1^*, x_2^*) memiliki bagian real negatif, khususnya jika*

$$\begin{aligned} \text{tr}J(x_1^*, x_2^*) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} < 0, \\ \det J(x_1^*, x_2^*) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0, \end{aligned}$$

maka titik kesetimbangan (x_1^, x_2^*) adalah stabil asimtotik.*

2.3 Bifurkasi Hopf

Misalkan diberikan sistem otonomus sebagai berikut

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\mu}), \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{\mu} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

Bifurkasi dapat diartikan sebagai perubahan sifat solusi sistem (2.14) yang diakibatkan oleh perubahan nilai parameter pada sistem (2.14). Salah satu jenis bifurkasi adalah bifurkasi Hopf, yaitu berubahnya jenis kestabilan suatu titik kesetimbangan sistem (2.14) dikarenakan munculnya sepasang nilai eigen yang bernilai imajiner murni. Syarat-syarat terjadinya bifurkasi Hopf untuk sistem tiga dimensi diberikan pada Teorema 2.6 berikut ini.

Teorema 2.6 (Chen, 2022) Misalkan diberikan sistem otonomus nonlinear dengan $n = 2$ dan parameter bifurkasi μ yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, \mu) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, \mu)\end{aligned}\tag{2.15}$$

dengan $\mu \in \mathbb{R}$. Misalkan matriks Jacobian di suatu titik kesetimbangan dari sistem (2.15) mempunyai persamaan karakteristik

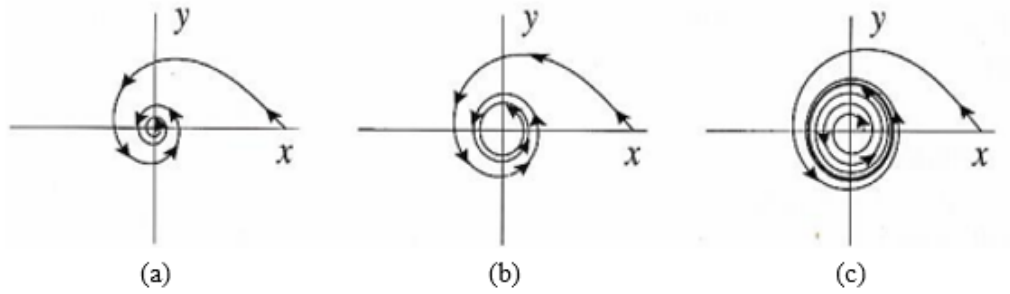
$$\lambda^2 - \text{tr}(J^*)\lambda + \det(J^*) = 0.\tag{2.16}$$

Syarat terjadinya bifurkasi Hopf adalah jika terdapat $\mu = \mu_{cr}$ yang memenuhi

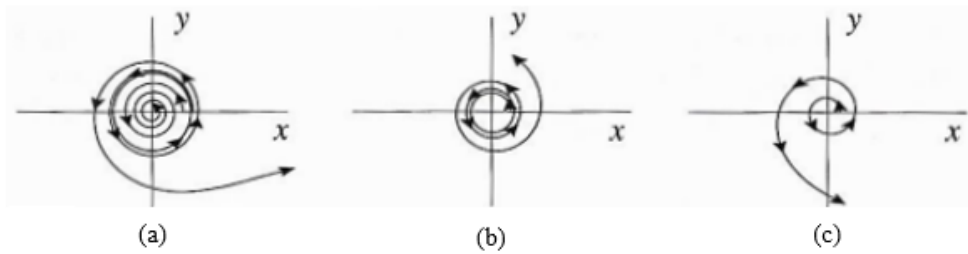
1. $\text{tr}(J^*)|_{\mu=\mu_{cr}} = 0$,
2. $\det(J^*)|_{\mu=\mu_{cr}} > 0$, dan
3. $\frac{d}{d\mu} [\text{tr}(J^*)]|_{\mu=\mu_{cr}} \neq 0$.

Salah satu tanda terjadinya bifurkasi Hopf adalah munculnya *limit cycle* pada bidang fase. *Limit cycle* adalah lintasan tertutup pada bidang fase yang mana lintasan tidak tertutup dari dalam maupun luar menuju ke suatu lintasan spiral (Boyce dan DiPrima, 2008).

Bifurkasi Hopf dibagi menjadi dua macam, yaitu bifurkasi Hopf *supercritical* dan bifurkasi Hopf *subcritical*. Bifurkasi Hopf *supercritical* terjadi saat *limit cycle* yang stabil muncul setelah parameter bifurkasi μ melewati nilai bifurkasi μ_{cr} . Sementara itu, bifurkasi Hopf *subcritical* terjadi saat menghilangnya *limit cycle* yang tidak stabil setelah parameter bifurkasi μ melewati nilai bifurkasi μ_{cr} .



Gambar 2.1 Bifurkasi Hopf *supercritical*. (a) $\mu < \mu_{cr}$, (b) $\mu = \mu_{cr}$, (c) $\mu > \mu_{cr}$



Gambar 2.2 Bifurkasi Hopf *subcritical*. (a) $\mu < \mu_{cr}$, (b) $\mu = \mu_{cr}$, (c) $\mu > \mu_{cr}$

(Robinson, 2004).

Untuk menentukan sifat arah dan stabilitas bifurkasi solusi periodik yang timbul melalui bifurkasi Hopf, dilakukan perhitungan bilangan Lyapunov. Untuk menghitung bilangan Lyapunov, semula bentuk fungsi analitik dari sistem (2.14) menjadi

$$\dot{x} = ax + by + p(x, y)$$

$$\dot{y} = cx + dy + q(x, y)$$

dengan $\Delta = ad - bc > 0$, $a + d = 0$ dan fungsi analitik $p(x, y)$, $q(x, y)$:

$$p(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j = (a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2) \\ + (a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} xy^2 + a_{03} y^3) + \dots$$

dan

$$q(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) \\ + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots$$

Matriks

$$Df(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

akan memiliki sepasang nilai eigen imajiner murni; bilangan Lyapunov η kemudian diberikan oleh rumus

$$\eta = -\frac{3\pi}{2b\Delta^{\frac{3}{2}}} \{ [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02}) \\ + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) \\ - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] \\ - (a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})] \}. \quad (2.17)$$

Bifurkasi Hopf *supercritical* terjadi ketika nilai parameter bifurkasi $\mu = \mu_{cr}$ dan nilai $\eta > 0$, sedangkan untuk *subcritical* terjadi ketika $\eta < 0$ (Perko, 2001). Simulasi terjadinya bifurkasi Hopf *supercritical* dan *subcritical* ditunjukkan pada Gambar 2.1 dan Gambar 2.2 secara berurutan.

2.4 Model Pertumbuhan Logistik

Salah satu model yang dapat digunakan untuk mengukur populasi suatu spesies adalah model pertumbuhan logistik (model Verhulst) yang melibatkan adanya daya dukung lingkungan terhadap pertumbuhan populasi. Model pertumbuhan logistik diberikan oleh persamaan

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right), \quad (2.18)$$

dengan P kepadatan populasi, r laju pertumbuhan dan K daya dukung lingkungan (Waluya, 2011).

Jika pada Persamaan (2.18) ditambahkan syarat awal $P(0) = P_0$, maka dapat diperoleh solusi khusus dari persamaan diferensial tersebut, yakni

$$P(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-rt} + 1}. \quad (2.19)$$

Karena $r > 0$, saat t meningkat didapat $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K$, yang mana K merupakan daya dukung dari populasi.

2.5 Model *Predator-Prey*

Model *predator-prey* merupakan salah satu model interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem, dengan *prey* sebagai spesies yang dimangsa dan *predator* sebagai spesies yang memangsa. Model ini disebut juga model Lotka-Volterra (Boyce dan DiPrima, 2008).

Interaksi yang terjadi antara mangsa dan pemangsa akan mengakibatkan terjadinya proses makan dan dimakan yang berpengaruh terhadap kepadatan populasi masing-masing. Model *predator-prey* dituliskan pada sistem persamaan diferensial

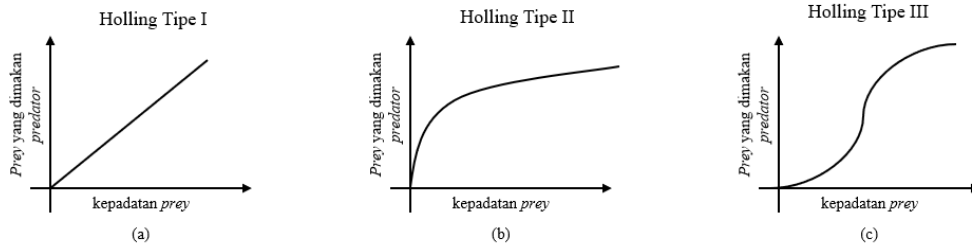
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \beta xy - \psi y \end{aligned} \quad (2.20)$$

dengan x dan y masing-masing menyatakan kepadatan populasi *prey* dan *predator*, sedangkan K , β , r , ψ berturut-turut menyatakan daya dukung lingkungan, tingkat interaksi *predator-prey*, laju pertumbuhan *prey*, serta tingkat kematian *predator*. Diasumsikan $K, \beta, r, \psi > 0$ karena setiap populasi berpotensi berkembang biak (Barnes dan Fulford, 2014).

2.6 Fungsi Respon Holling

Fungsi respon Holling dalam ekologi merupakan jumlah makanan yang dimakan oleh *predator* sebagai fungsi kepadatan makanan. Berdasarkan karakteristiknya, fungsi respon Holling terbagi dalam tiga tipe, yaitu Tipe I

(linear), Tipe II (perlambatan), dan Tipe III (sigmoid) (Arsyad dkk., 2020).



Gambar 2.3 (a) Fungsi Respon Tipe I, (b) Fungsi Respon Tipe II, (c) Fungsi Respon Tipe III

2.6.1 Fungsi Respon Holling Tipe I

Fungsi respon Holling tipe I merupakan hubungan dengan tingkat konsumsi. Tingkat konsumsi *predator* meningkat linear dengan kepadatan *prey*, tetapi akan konstan ketika *predator* berhenti memangsa. Peningkatan linear mengasumsikan bahwa waktu yang dibutuhkan oleh konsumen untuk memproses pokok makanan diabaikan, atau bahwa mengkonsumsi makanan tidak mengganggu pencarian makanan. Fungsi respon Holling tipe I terjadi pada *predator* yang memiliki karakteristik pasif, atau lebih suka menunggu *prey*-nya, sebagai contoh *predator*-nya adalah laba-laba. Fungsi respon Holling tipe I adalah fungsi respon pertama yang dijelaskan dan juga yang paling sederhana dari tiga fungsi respon yang ada saat ini. Adapun tingkat pertumbuhan mangsa pada model fungsi respon Holling tipe I diberikan

$$F_1(x) = \beta x, \quad (2.21)$$

dengan

F_1 = fungsi respon Holling tipe I,

β = tingkat konsumsi maksimum *predator* terhadap *prey* ($\beta \geq 0$),

x = jumlah populasi *prey* ($x \geq 0$)

(Arsyad dkk., 2020).

2.6.2 Fungsi Respon Holling Tipe II

Pada fungsi respon Holling tipe II, terlihat bahwa rata-rata tingkat konsumsi dari *predator*, ketika *predator* menghabiskan waktu untuk mencari *prey*. Fungsi respon tipe II terjadi pada *predator* yang berkarakteristik aktif dalam mencari *prey*, sebagai contoh *predator*-nya adalah serigala. Fungsi ini akan meningkat jika tingkat konsumsi menurun dan akan konstan jika mencapai titik kejenuhan (*half-saturation*). Hal ini disebabkan setiap pemangsa hanya dapat memakan sejumlah mangsa pada saat satu satuan waktu. Adapun tingkat pertumbuhan *prey* pada model Holling tipe II ditulis pada persamaan

$$F_2(x) = \frac{\beta x}{1 + \alpha x} \quad (2.22)$$

dengan

F_2 = fungsi respon Holling tipe II,

β = tingkat konsumsi maksimum *predator* terhadap *prey* ($\beta \geq 0$),

α = waktu pencarian *prey* ($\alpha \geq 0$),

x = jumlah populasi *prey* ($x \geq 0$)

(Arsyad dkk., 2020).

2.6.3 Fungsi Respon Holling Tipe III

Fungsi respon Holling tipe III juga menggambarkan tingkat pertumbuhan *predator*. Tetapi pada fungsi ini dapat terlihat mengenai penurunan tingkat predasi pada saat kepadatan *prey* rendah. Hal tersebut tidak dapat terlihat pada fungsi respon Holling tipe III. Fungsi respon holling tipe III terjadi pada *predator* yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain ketika populasi *prey* yang dimakan mulai berkurang. Karena *predator* yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain, maka tingkat pertemuan antara *predator* dan *prey* adalah dua. Hal inilah yang menyebabkan variabel populasi *prey* menjadi x^2 , sehingga laju populasi menjadi lebih cepat. Adapun tingkat pertumbuhan *prey* pada model

Holling tipe III ditulis

$$F_3(x) = \frac{\beta x^2}{1 + \alpha x^2} \quad (2.23)$$

dengan

F_3 = fungsi respon Holling tipe III,

β = tingkat konsumsi maksimum *predator* terhadap *prey* ($\beta \geq 0$),

α = waktu pencarian *prey* ($\alpha \geq 0$)

x = jumlah populasi *prey* ($x \geq 0$)

(Arsyad dkk., 2020).

2.7 Efek Perlindungan Prey

Dalam proses predasi, populasi *predator* memangsa populasi *prey* secara terus-menerus sehingga populasi *prey* berkurang dan terancam punah. Untuk menghindari kepunahan diperlukan faktor perlindungan *prey*. Di alam bebas, naluri *prey* untuk berlindung dari *predator* merupakan faktor yang perlu diperhitungkan dalam pemodelan. *Prey* hanya keluar dari tempat berlindungnya ketika ia merasa aman dari *predator*. Efek perlindungan mengurangi kemungkinan *prey* untuk dimangsa sehingga terhindar dari kepunahan (Pal dan Samanta, 2010).

Misalkan ξ menyatakan laju *prey* yang berlindung, maka laju *prey* yang dapat dimangsa oleh *predator* adalah $(1 - \xi)x$ dengan $\xi \in [0, 1)$. Jika faktor perlindungan *prey* diperhitungkan, maka sistem persamaan (2.20) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \beta x(1 - \xi y)y \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x(1 - \xi y)y - \psi y \end{aligned} \quad (2.24)$$

(Zhuang dan Wen, 2011).

2.8 Efek Allee

Efek Allee merupakan fenomena ekologi yang memiliki daya tarik cukup menarik dari ahli ekologi, berbagai mekanisme yang berkaitan dengan efek Allee

telah dibahas secara keseluruhan. Pencetus dari fenomena tersebut adalah Clyde Warder Allee (1885 - 1955), *zoologist* Universitas Chicago dan ekologi hewan, khususnya pada kelompok perilaku hewan. Allee adalah seorang pengamat perilaku hewan yang melihat bahwa kerjasama antar individu memiliki dampak positif, terutama pada populasi dengan ukuran rendah atau kepadatan rendah. Efek Allee menunjukkan bahwa interaksi positif tersebut memiliki peran penting dalam kelangsungan hidup dan reproduksi suatu individu. (Stephens dan Sutherland, 1999).

Efek Allee merupakan penurunan laju pertumbuhan populasi pada kepadatan rendah yang disebabkan oleh beberapa mekanisme, seperti kesulitan dalam menemukan pasangan di kepadatan rendah. Sebagai contoh, populasi alamiah dari kupu-kupu yang terancam punah, yaitu *Melitaea cinxia*. Selain itu penyebab terjadinya efek Allee lainnya adalah perkawinan sedarah dan hilangnya heterozigositas dalam sel yaitu hilangnya fungsi normal dari satu alel dari gen di mana alel lainnya sudah tidak aktif sehingga menyebabkan penurunan kebugaran. Efek Allee dapat menyebabkan kepunahan spesies ketika kepadatan terlalu rendah. Pada ukuran populasi yang sangat kecil, beberapa spesies yang terancam punah, seperti burung Kakapo (*Strigops habroptilus*), memiliki probabilitas rendah untuk menemukan pasangan (Courchamp dkk., 1999).

Jika efek Allee pada populasi *prey* dinyatakan sebagai fungsi $\frac{x}{u+x}$, maka sistem persamaan (2.24) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{1}{u+x} \right) - \beta x(1 - \xi y)y \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x(1 - \xi y)y - \psi y\end{aligned}\tag{2.25}$$

dengan $u > 0$ menyatakan parameter Allee.

2.9 Model *Predator-Prey* dengan Pengaruh Perlindungan dan Efek Allee pada Populasi *prey*

Molla dkk., (2022) melakukan riset model *predator-prey* dengan penambahan variabel perlindungan *prey* dan efek Allee dengan menggunakan model:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{\beta x(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)}, \\ \frac{dy}{dt} &= \left(\frac{E\beta x(1 - \xi y)}{\alpha + x(1 - \xi y)} - \psi \right) y,\end{aligned}\tag{2.26}$$

dengan r adalah laju pertumbuhan *prey*, K adalah daya dukung lingkungan, β adalah tingkat konsumsi *prey* oleh *predator*, ξ adalah koefisien perlindungan *prey*, α menyatakan waktu pencarian *prey*, E adalah efisiensi konversi dan ψ adalah tingkat kematian alami, serta τ dan φ adalah derajat dari efek Allee.

Efek Allee kuat terjadi jika kondisi $0 < \varphi < \tau$ terpenuhi; jika kondisinya $0 < \tau < \varphi$ maka terjadi efek Allee lemah. Secara biologis, efek Allee yang kuat menyiratkan bahwa kerugian dari kepadatan penduduk pada tingkat rendah lebih besar daripada keuntungan; efek Allee yang lemah tidak memiliki persyaratan ini. Mereka memilih untuk menggunakan bentuk aditif $\frac{\tau}{x+\varphi}$ karena ini adalah bentuk paling sederhana yang memberikan efek Allee yang kuat sekaligus efek Allee yang lemah (Molla dkk., 2022).

2.10 Pemanenan

Pemanenan adalah praktik manusia dalam menangkap dan mengurangi populasi *prey* atau *predator* di alam untuk tujuan ekonomi atau perlindungan sumber daya. Praktik ini dapat mempengaruhi dinamika populasi *predator-prey* dan ekosistem secara keseluruhan.

Misalkan $E_1 > 0$ menyatakan usaha pemanenan *prey* dan $E_2 > 0$ menyatakan usaha pemanenan *predator*. Jika faktor pemanenan di kedua populasi diperhitungkan, maka sistem persamaan (2.20) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \beta xy - q_1 E_1 x \\ \frac{dy}{dt} &= \beta xy - \psi y - q_2 E_2 y\end{aligned}\tag{2.27}$$

dengan masing-masing q_1 , q_2 adalah koefisien daya tangkap *prey* dan *predator* (Haque dan Sarwardi, 2018).

2.11 Model Bionomik

Menurut Fauzi dan Anna (2005) dasar dalam pengelolaan sumber daya populasi adalah bagaimana memanfaatkan sumber daya sehingga menghasilkan manfaat ekonomi yang tinggi bagi pengguna, namun kelestariannya tetap terjaga. Terkandung dua makna dari pernyataan tersebut yaitu makna ekonomi dan makna konservasi atau biologi. Dengan demikian pemanfaatan optimal sumber daya populasi harus mengakomodasi kedua ilmu tersebut. Oleh karena itu, pendekatan bionomik dalam pengelolaan sumber daya merupakan hal yang harus dipahami oleh setiap pelaku yang terlibat dalam pengelolaan sumberdaya populasi.

Istilah bionomik (bioekonomi) diperkenalkan oleh Scott Gordon, seorang ahli dari Kanada yang pertama kali menggunakan pendekatan ekonomi untuk menganalisis pengelolaan sumberdaya ikan yang optimal. Karena Gordon menggunakan basis biologi yang sebelumnya sudah diperkenalkan oleh Schaefer (1954), pendekatan Gordon ini disebut pendekatan bioekonomi (Fauzi dan Anna, 2005).

2.12 Prinsip Maksimum Pontryagin

Tujuan utama kontrol optimal adalah menentukan nilai variabel kontrol yang memenuhi beberapa kendala keadaan dan pada saat yang bersamaan memaksimalkan atau meminimalkan kriteria performansi yang dipilih (disebut juga fungsi objektif atau fungsi keuntungan). Pada eksploitasi komersial dari pemanenan, masalah utama pada sudut pandang ekonomi adalah menentukan panen yang optimal antara saat ini dan masa mendatang sekaligus memperoleh keuntungan optimal. Untuk memaksimalkan total laba bersih dari sumber daya, maka masalah kontrol optimal dapat diformulasikan dengan fungsi keuntungan.

Kendala variabel kontrol dapat diselesaikan dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Prinsip maksimum Pontryagin digunakan untuk mendapatkan kontrol optimal dari suatu sistem dinamik dengan memaksimalkan fungsi keuntungan. Berikut diberikan ringkasan prosedur penyelesaian masalah

kontrol optimal dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin.

Diberikan persamaan keadaan $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ dan fungsi keuntungan

$$J = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, t) dt. \quad (2.28)$$

Diberikan pula kendala variabel kontrol $u \in U$ untuk setiap $t \in [t_0, t_1]$. Kemudian dibentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x, u, \lambda, t) = g(x, u, t) + \lambda f(x, u, t), \quad (2.29)$$

dimana λ adalah fungsi yang tidak diketahui disebut variabel adjoin. Kemudian maksimumkan fungsi $H(x, u, \lambda, t)$ terhadap semua vektor kontrol untuk memperoleh $u^* = u^*(x, \lambda, t)$ dengan cara menyelesaikan persamaan kontrol $\frac{\partial}{\partial u} H(x, u, \lambda, t) = 0$. Langkah selanjutnya yaitu membentuk fungsi Hamiltonian $H^*(x, \lambda, t) = \max_{u \in U} H(x, u, \lambda, t)$ dan menyelesaikan persamaan

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\partial H(x, \lambda, t)}{\partial \lambda}, \quad (2.30)$$

$$\frac{d\dot{\lambda}}{dt} = -\frac{\partial H^*(x, \lambda, t)}{\partial x}, \quad (2.31)$$

dengan kondisi batas diberikan. Persamaan (2.30) disebut persamaan *state* dan persamaan (2.31) disebut persamaan *co-state*. Untuk memperoleh kontrol optimal, hasil dari persamaan (2.30) dan (2.31) disubstitusi ke dalam ekspresi u^* (Subiono, 2013).

BAB 3

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian tugas akhir ini dilaksanakan pada bulan Januari 2023 - Juli 2023. Penelitian ini melakukan studi literatur dan simulasi numerik di laboratorium Matematika Komputasi dan laboratorium Pemodelan dan *Machine Learning*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman.

3.2 Tahapan Penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Kajian Pustaka

Kajian pustaka merupakan suatu tahap awal yang dilakukan untuk mendapatkan informasi dari buku-buku dan jurnal yang berkaitan dengan masalah model *predator-prey* dengan pengaruh perlindungan *prey*, efek Allee, dan pemanenan *predator*. Mengumpulkan konsep pendukung yang diperlukan dalam penyelesaian masalah, sehingga didapatkan suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan dalam upaya pemecahan masalah.

2. Mengkonstruksi Model *Predator-Prey*

Pada tahap ini dilakukan kontruksi model *predator-prey* yang mengacu pada model yang digunakan oleh Molla dkk., (2022). Model dimodifikasi dengan menambahkan variabel pemanenan linear pada populasi *predator* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) = rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{\beta x(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)}, \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) = \frac{E\beta x(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)} - \psi y - a\Lambda y,\end{aligned}\tag{3.1}$$

dengan a adalah koefisien daya tangkap *predator* dan Λ adalah pemanenan pada populasi *predator*.

3. Menganalisis Model *Predator-Prey*

Analisis model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey*

dan pemanenan *predator* dimulai dengan mencari titik-titik kesetimbangan dari model (3.1). Selanjutnya, ditentukan syarat eksistensi titik-titik tersebut serta mencari syarat-syarat kestabilan lokal dengan menganalisis nilai eigen dari matriks Jacobian seperti yang ditunjukkan pada persamaan (2.13).

4. Analisis Bifurkasi Hopf

Pada tahap ini dilakukan penentuan nilai kritisal disekitar titik kesetimbangan $E^* = (x^*, y^*)$ untuk memastikan adanya bifurkasi Hopf di sekitar koeksistensi titik kesetimbangan E^* , seperti yang ditunjukkan pada Teorema 2.6 dan akan dilakukan perhitungan bilangan Lyapunov untuk menentukan arah dan stabilitas solusi sistem.

5. Menganalisis Model Bionomik

Analisis model bionomik dimulai dengan mengkonstruksi fungsi keuntungan $\zeta = (pay - b)\Lambda$. Dilanjutkan dengan mencari titik kesetimbangan dari model bionomik. Selanjutnya, kontrol pemanenan optimal dianalisis menggunakan prinsip maksimum Pontryagin untuk memaksimalkan keuntungan model bionomik dengan tetap menjaga kelestarian ekosistem.

6. Simulasi Numerik

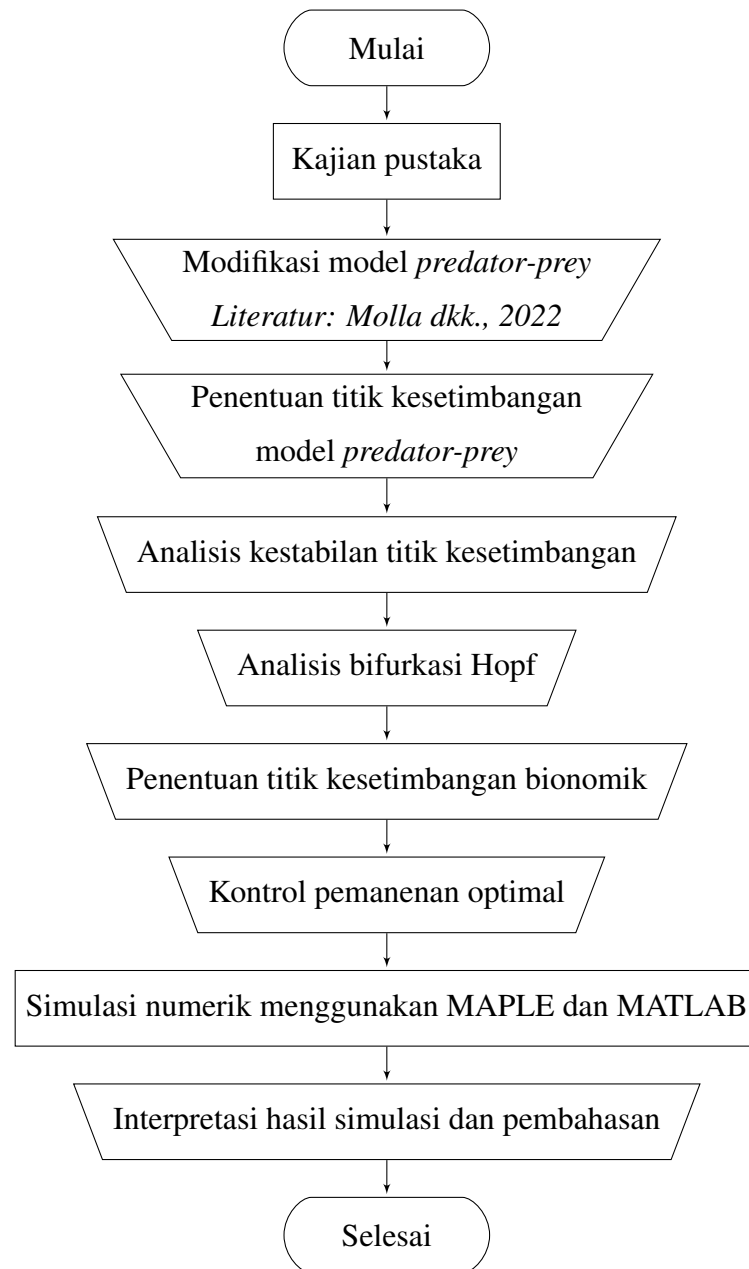
Simulasi numerik dilakukan untuk menggambarkan secara numerik model *predator-prey*. Model disimulasikan dengan menggunakan *software* MATLAB R2021a dan MAPLE yang dijalankan dengan variasi nilai parameter.

7. Interpretasi Hasil Simulasi

Hasil simulasi yang diperoleh dari *output* program dievaluasi untuk memeriksa kesesuaian dengan hasil analisis dinamik.

3.3 Bagan Alir Penelitian

Secara umum kerangka dari penelitian ini disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Kerangka Penelitian

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model *Predator-Prey* dengan Pengaruh Efek Allee, Perlindungan *Prey* dan Pemanenan *Predator*

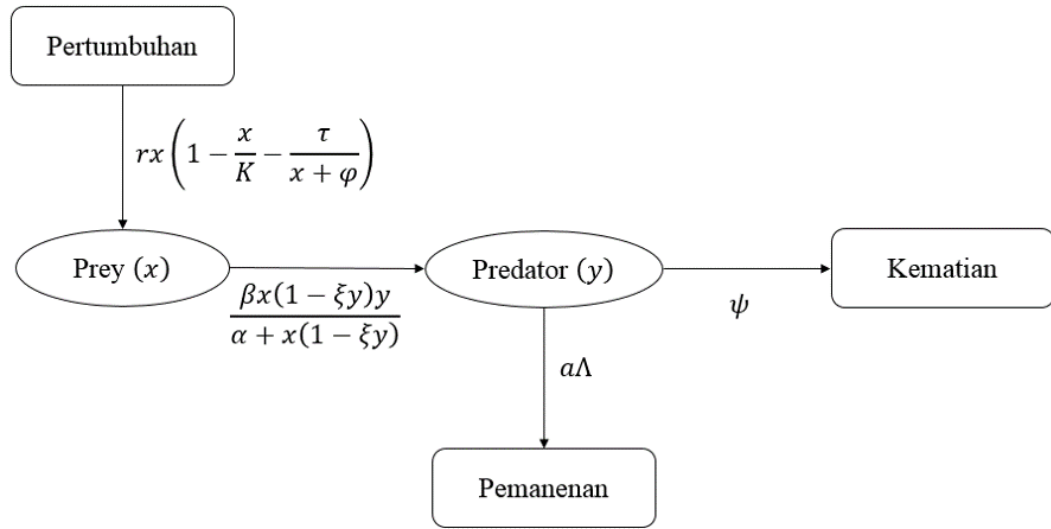
Pada sub bab ini dibahas model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan penambahan variabel pemanenan *predator*. Model yang digunakan merupakan modifikasi model Molla dkk., (2022). Dalam penelitian ini, terdapat dua populasi pada model yaitu populasi *prey* dan *predator*. Modifikasi dari model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan pemanenan *predator* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) = rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{\beta x(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)}, \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) = \frac{E\beta x(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)} - \psi y - a\Lambda y,\end{aligned}\tag{4.1}$$

Beberapa penjelasan untuk model *predator-prey* pada persamaan (4.1) adalah:

1. Variabel x menyatakan jumlah populasi *prey* dan y menyatakan jumlah populasi *predator*, dengan kondisi awal $x(0) = x_0 > 0$ serta $y(0) = y_0 > 0$,
2. Parameter r menyatakan laju pertumbuhan populasi *prey* dan K adalah daya dukung lingkungan (*carrying capacity*),
3. Parameter $\tau, \varphi > 0$ menyatakan derajat efek Allee, efek Allee kuat terjadi jika kondisi $0 < \varphi < \tau$ terpenuhi; jika kondisinya $0 < \tau < \varphi$ maka terjadi efek Allee lemah,
4. Parameter $\beta > 0$ menyatakan laju pengurangan *prey* oleh *predator* atau tingkat konsumsi maksimum *predator*, parameter ξ menyatakan koefisien perlindungan *prey* dan E adalah efisiensi konversi energi,
5. Parameter ψ menyatakan kematian alami *predator*, a menyatakan koefisien daya tangkap *predator* dan Λ adalah pemanenan *predator*,
6. Bentuk $\frac{\beta x(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)}$ merepresentasikan fungsi respon Holling tipe II, α adalah waktu pencarian *prey* oleh *predator* atau konstanta setengah saturasi dan $(1 - \xi y)$ adalah perlindungan *prey*.

Pada Gambar 4.1, jumlah populasi *prey* bertambah karena pertumbuhan populasi *prey* dengan laju r mengikuti persamaan logistik, kemudian jumlah populasi *prey* berkurang akibat dimangsa *predator* dengan laju β sedangkan populasi *predator* meningkat dengan laju E mengikuti fungsi respon Holling tipe II. Selanjutnya, jumlah populasi *predator* berkurang akibat kematian alami dengan laju ψ dan berkurang dengan laju $a\Lambda$ akibat pemanenan yang berkontribusi pada berkurangnya populasi *predator*. Adapun bagan interaksi *predator-prey* pada model (4.1) ditunjukkan pada Gambar 4.1



Gambar 4.1 Interaksi antara *prey* dan *predator*

4.2 Titik Keseimbangan Model

Berdasarkan definisi (2.1) suatu titik keseimbangan pada sistem (4.1) merupakan titik (x^*, y^*) yang memenuhi kondisi $F(x, y) = G(x, y) = 0$. Proses penentuan titik keseimbangan model *predator-prey* pada sistem (4.1) menjadi

$$\left(r \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{\beta(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)} \right) x = 0, \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{E\beta x(1 - \xi y)}{\alpha + x(1 - \xi y)} - \psi - a\Lambda \right) y = 0. \quad (4.3)$$

Dari persamaan (4.2) diperoleh:

$$x = 0, \quad (4.4)$$

atau

$$r \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{\beta(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)} = 0. \quad (4.5)$$

Dari persamaan (4.3) diperoleh:

$$y = 0, \quad (4.6)$$

atau

$$\frac{E\beta x(1 - \xi y)}{\alpha + x(1 - \xi y)} - \psi - a\Lambda = 0. \quad (4.7)$$

4.2.1 Titik Kesetimbangan E_0

Titik kesetimbangan E_0 diperoleh dengan mengkombinasikan persamaan (4.4) dan (4.6), sehingga didapat:

$$E_0 = (0, 0).$$

Titik E_0 merepresentasikan populasi *prey* dan *predator* mengalami kepunahan.

4.2.2 Titik Kesetimbangan $E^\pm$

Titik kesetimbangan $E^\pm$ diperoleh dengan cara mensubstitusikan persamaan (4.6) ke persamaan (4.5) sehingga:

$$\begin{aligned} r \left(1 - \frac{x^\pm}{K} - \frac{\tau}{x^\pm + \varphi} \right) &= 0, \\ 1 - \frac{x^\pm}{K} - \frac{\tau}{x^\pm + \varphi} &= 0, \\ \frac{K(x^\pm + \varphi) - x^\pm(x^\pm + \varphi) - K\tau}{K(x^\pm + \varphi)} &= 0, \\ (x^\pm + \varphi)(K - x^\pm) - K\tau &= 0, \\ (x^\pm)^2 + (\varphi - K)x^\pm + K(\tau - \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Titik $x^\pm$ diperoleh dengan menentukan akar persamaan kuadrat (4.8) didapat:

$$x^\pm = \frac{(K - \varphi) \pm \sqrt{(\varphi - K)^2 - 4K(\tau - \varphi)}}{2}. \quad (4.9)$$

Oleh karena itu, diperoleh titik kesetimbangan $E^\pm = (x^\pm, 0)$. Titik $E^\pm$ merepresentasikan populasi *prey* lestari di alam, sedangkan populasi *predator* punah.

4.2.3 Titik Kesetimbangan E^*

Titik kesetimbangan E^* diperoleh dengan cara mensubstitusi y^* dari persamaan (4.7):

$$\begin{aligned} \frac{E\beta x(1 - \xi y)}{\alpha + x(1 - \xi y)} - \psi - a\Lambda &= 0, \\ \frac{E\beta x(1 - \xi y)}{\alpha + x(1 - \xi y)} &= \psi + a\Lambda, \\ E\beta x(1 - \xi y) &= \alpha\psi + \psi x(1 - \xi y) + \alpha a\Lambda + a\Lambda x(1 - \xi y), \\ E\beta x - E\beta \xi xy &= \alpha\psi + \psi x - \psi \xi xy + \alpha a\Lambda + a\Lambda x - a\Lambda \xi xy, \\ E\beta x - \psi x - a\Lambda x - \alpha\psi - \alpha a\Lambda &= E\beta \xi xy - \psi \xi xy - a\Lambda \xi xy, \\ (E\beta - \psi - a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda) &= \xi(E\beta - \psi - a\Lambda)xy, \\ y^* &= \frac{(E\beta - \psi - a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda)}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)x}, \end{aligned}$$

ke persamaan (4.5), menjadi:

$$rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{\beta x(1 - \xi y^*)y^*}{\alpha + x(1 - \xi y^*)} = 0, \quad (4.10)$$

misalkan $m = \beta x(1 - \xi y^*)y^*$ dan $n = \alpha + x(1 - \xi y^*)$, maka m dan n menjadi:

$$\begin{aligned} m &= \beta x(1 - \xi y^*)y^*, \\ m &= \beta x \left(1 - \xi \left(\frac{(E\beta - \psi - a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda)}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)x} \right) \right) \frac{(E\beta - \psi - a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda)}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)x}, \\ m &= \beta x \left(\frac{(E\beta - \psi - a\Lambda)x}{(E\beta - \psi - a\Lambda)x} - \frac{(E\beta - \psi - a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda)}{(E\beta - \psi - a\Lambda)x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(E\beta - \psi - a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda)}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)} \right), \\
m &= \frac{\beta x}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)} \left(\frac{\alpha(\psi + a\Lambda)}{(E\beta - \psi - a\Lambda)x} \right) \left((E\beta - \psi - a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda) \right), \\
m &= \frac{\beta x}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)} \left(\alpha(\psi + a\Lambda) - \frac{(\alpha(\psi + a\Lambda))^2}{(E\beta - \psi - a\Lambda)x} \right), \\
m &= \frac{\beta x}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)} \left(\frac{\alpha(\psi + a\Lambda)(E\beta - \psi - a\Lambda)x}{(E\beta - \psi - a\Lambda)x} - \frac{(\alpha(\psi + a\Lambda))^2}{(E\beta - \psi - a\Lambda)x} \right), \\
m &= \frac{\beta x}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)} \left(\frac{\alpha E\beta(\psi + a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda)^2x - (\alpha(\psi + a\Lambda))^2}{(E\beta - \psi - a\Lambda)x} \right), \\
m &= \frac{\beta}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)} \left(\frac{\alpha(\psi + a\Lambda)(E\beta x - (\psi + a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda))}{(E\beta - \psi - a\Lambda)} \right),
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
n &= \alpha + x(1 - \xi y^*), \\
n &= \alpha + x \left(1 - \xi \frac{(E\beta - \psi - a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda)}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)x} \right), \\
n &= (\alpha + x) \left(\frac{(E\beta - \psi - a\Lambda)x}{(E\beta - \psi - a\Lambda)x} - \frac{(E\beta - \psi - a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda)}{(E\beta - \psi - a\Lambda)x} \right), \\
n &= \alpha + x \left(\frac{\alpha(\psi + a\Lambda)}{(E\beta - \psi - a\Lambda)x} \right), \\
n &= \frac{\alpha(E\beta - \psi - a\Lambda) + \alpha(\psi + a\Lambda)}{E\beta - \psi - a\Lambda}, \\
n &= \frac{\alpha E\beta - \alpha(\psi + a\Lambda) + \alpha(\psi + a\Lambda)}{E\beta - \psi - a\Lambda}, \\
n &= \frac{\alpha E\beta}{E\beta - \psi - a\Lambda}.
\end{aligned}$$

Bentuk persamaan (4.10) menjadi:

$$\begin{aligned}
& rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{m}{n} = 0, \\
& rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{\frac{\beta}{\xi(E\beta - \psi - a\Lambda)} \left(\frac{\alpha(\psi + a\Lambda)(E\beta x - (\psi + a\Lambda)x - \alpha(\psi + a\Lambda))}{(E\beta - \psi - a\Lambda)} \right)}{\frac{\alpha E\beta}{E\beta - \psi - a\Lambda}} = 0, \\
& rx \left(\frac{K - x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{\beta \left(\alpha(\psi + a\Lambda)(E\beta x - (x - \alpha)(\psi + a\Lambda)) \right)}{\xi \alpha E\beta (E\beta - \psi - a\Lambda)x} = 0, \\
& rx \left(\frac{-x^2 + (K - \varphi)x + K(\varphi - \tau)}{K(x + \varphi)} \right) - \frac{(\psi + a\Lambda)(E\beta x - (x - \alpha)(\psi + a\Lambda))}{\xi E(E\beta - \psi - a\Lambda)x} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [-rx^3 + rx^2(K - \varphi) + rKx(\varphi - \tau)] [\xi E(E\beta - \psi - a\Lambda)x] \\
& - [(\psi + a\Lambda)(E\beta x - (x - \alpha)(\psi + a\Lambda))] [K(x + \varphi)] = 0, \\
& -\xi Er(E\beta - \psi - a\Lambda)x^4 + \xi Er(K - \varphi)(E\beta - \psi - a\Lambda)x^3 \\
& + \xi EKr(\varphi - \tau)(E\beta - \psi - a\Lambda)x^2 - E\beta K(\psi + a\Lambda)x^2 - E\beta K\varphi(\psi + a\Lambda)x \\
& + K(\psi + a\Lambda)^2x^2 + K\varphi(\psi + a\Lambda)^2x - \alpha K(\psi + a\Lambda)^2x - \alpha\varphi K(\psi + a\Lambda)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Atau dapat ditulis menjadi

$$A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0, \quad (4.11)$$

dengan

$$\begin{aligned}
A_4 &= E^2\beta r\xi - E\psi r\xi - Ear\Lambda\xi, \\
A_3 &= -E^2K\beta r\xi + E^2\beta r\varphi\xi + EK\Lambda ar\xi - E\Lambda ar\varphi\xi + EK\psi r\xi - E\psi r\varphi\xi, \\
A_2 &= E^2K\beta r\tau\xi - E^2K\beta r\varphi\xi - EK\Lambda ar\tau\xi + EK\Lambda ar\varphi\xi - EK\psi r\tau\xi + E\psi r\varphi\xi \\
&\quad + EK\Lambda a\beta - K\Lambda^2a^2 + EK\beta\psi - 2K\Lambda a\psi - K\psi^2, \\
A_1 &= EK\Lambda a\beta\varphi - K\Lambda^2a^2\alpha - K\Lambda^2a^2\varphi + EK\beta\psi\varphi - 2K\Lambda a\alpha\psi - 2K\Lambda a\psi\varphi \\
&\quad - K\alpha\psi^2 - K\psi^2\varphi, \\
A_0 &= -K\alpha\psi^2\varphi - 2K\Lambda a\alpha\psi\varphi - K\Lambda^2a^2\alpha\varphi.
\end{aligned}$$

Titik x^* diperoleh dengan menentukan akar positif persamaan polinomial derajat empat persamaan (4.11). Oleh karena itu, diperoleh titik kesetimbangan $E^* = (x^*, y^*)$. Titik E^* merepresentasikan baik populasi *prey* maupun *predator* tetap lestari di alam.

4.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (4.1), dilakukan analisis nilai eigen dari matriks Jacobian untuk masing-masing titik $E_0, E^\pm$ dan E^* . Adapun matriks Jacobian untuk sistem (4.1) adalah sebagai

berikut:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= r \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) + rx \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x + \varphi)^2} \right) - \frac{\beta y(1 - \xi y)}{\alpha + x(1 - \xi y)} \\ &\quad + \frac{\beta xy(1 - \xi y)^2}{(\alpha + x(1 - \xi y))^2}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\beta x(-\xi^2 xy^2 + 2\alpha \xi y + 2\xi xy - \alpha - x)}{(\alpha + x - \xi xy)^2}, \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{E\beta\alpha(1 - \xi y)y}{(\alpha + x - \xi xy)^2}, \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{E\beta x(\xi^2 xy^2 - 2\xi xy - 2\alpha \xi y + x + \alpha)}{(\alpha + x - \xi xy)^2} - \psi - a\Lambda. \end{aligned}$$

4.3.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan E_0

Matriks Jacobian untuk sistem (4.1) di titik kesetimbangan E_0 didapat dengan mensubstitusikan $E_0 = (0, 0)$ ke matriks (4.12), maka diperoleh:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{\tau}{\varphi} \right) & 0 \\ 0 & -\psi - a\Lambda \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik matriks Jacobian pada titik kesetimbangan E_0 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |J(E_0) - \lambda I| &= 0, \\ \left| \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{\tau}{\varphi} \right) & 0 \\ 0 & -\psi - a\Lambda \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| &= 0, \\ \left| \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{\tau}{\varphi} \right) & 0 \\ 0 & -\psi - a\Lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} r \left(1 - \frac{\tau}{\varphi}\right) - \lambda & 0 \\ 0 & -\psi - a\Lambda - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left(r \left(1 - \frac{\tau}{\varphi}\right) - \lambda\right) (-\psi - a\Lambda - \lambda) = 0,$$

didapat

$$\lambda_1 = r \left(1 - \frac{\tau}{\varphi}\right), \quad (4.13)$$

dan

$$\lambda_2 = -\psi - a\Lambda. \quad (4.14)$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa titik kesetimbangan $E_0 = (0, 0)$ bersifat stabil asimtotik jika $\tau > \varphi$ (efek Allee kuat) dan tidak stabil jika $\tau < \varphi$ (efek Allee lemah).

4.3.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan $E^\pm$

Matriks Jacobian untuk titik kesetimbangan $E^\pm = (x^\pm, 0)$ adalah

$$J(E^\pm) = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x^\pm}{K} - \frac{\tau}{x^\pm + \varphi}\right) + rx^\pm \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^\pm + \varphi)^2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{E\beta x^\pm}{\alpha + x^\pm} - \psi - a\Lambda \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik matriks Jacobian pada titik kesetimbangan $E^\pm$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |J(E^\pm) - \lambda I| &= 0, \\ \left| \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x^\pm}{K} - \frac{\tau}{x^\pm + \varphi}\right) + rx^\pm \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^\pm + \varphi)^2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{E\beta x^\pm}{\alpha + x^\pm} - \psi - a\Lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0, \\ \left| \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x^\pm}{K} - \frac{\tau}{x^\pm + \varphi}\right) + rx^\pm \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^\pm + \varphi)^2}\right) - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{E\beta x^\pm}{\alpha + x^\pm} - \psi - a\Lambda - \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0, \end{aligned}$$

diperoleh bahwa

$$\lambda_1 = r \left(1 - \frac{x^\pm}{K} - \frac{\tau}{x^\pm + \varphi} \right) + rx^\pm \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^\pm + \varphi)^2} \right), \quad (4.15)$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{E\beta x^\pm}{\alpha + x^\pm} - \psi - a\Lambda. \quad (4.16)$$

Pada persamaan (4.15), agar $\lambda_1 < 0$ maka

$$\begin{aligned} r \left(1 - \frac{x^\pm}{K} - \frac{\tau}{x^\pm + \varphi} \right) + rx^\pm \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^\pm + \varphi)^2} \right) &< 0, \\ 1 - \frac{x^\pm}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} + \left(-\frac{x^\pm(x^\pm + \varphi)^2}{K(x^\pm + \varphi)^2} + \frac{K\tau x^\pm}{K(x^\pm + \varphi)^2} \right) &< 0, \\ \frac{K(x^\pm + \varphi)^2 - x^\pm(x^\pm + \varphi) - K\tau(x^\pm + \varphi) - x^\pm(x^\pm + \varphi)^2 + K\tau x^\pm}{K(x^\pm + \varphi)^2} &< 0, \\ Kx^{\pm 2} + 2K\varphi x^\pm + K\varphi^2 - x^{\pm 3} - 2\varphi x^{\pm 2} - \varphi^2 x^\pm - K\tau x^\pm - K\tau\varphi & \\ -x^{\pm 3} - 2\varphi x^{\pm 2} - \varphi^2 x^\pm + K\tau x^\pm &< 0, \\ -2x^{\pm 3} + Kx^{\pm 2} - 4\varphi x^{\pm 2} + 2K\varphi x^\pm - 2\varphi^2 x^\pm + K\varphi^2 - K\tau\varphi &< 0, \\ x^{\pm 3} - \left(\frac{K}{2} - 2\varphi \right) x^{\pm 2} - \varphi(K - \varphi)x^\pm + \frac{K\varphi}{2}(\tau - \varphi) &> 0, \\ S_1 &> 0, \end{aligned}$$

dengan $S_1 = x^{\pm 3} - \left(\frac{K}{2} - 2\varphi \right) x^{\pm 2} - \varphi(K - \varphi)x^\pm + \frac{K\varphi}{2}(\tau - \varphi)$ dan pada persamaan (4.16), agar $\lambda_2 < 0$ maka

$$\begin{aligned} \frac{E\beta x^\pm}{\alpha + x^\pm} - \psi - a\Lambda &< 0, \\ E\beta x^\pm &< (\psi + a\Lambda)(\alpha + x^\pm), \\ E\beta x^\pm &< \alpha\psi + \psi x^\pm + a\alpha\Lambda + a\Lambda x^\pm, \\ (E\beta - \psi - a\Lambda)x^\pm &< \alpha\psi + a\alpha\Lambda, \\ x^\pm &< \frac{\alpha\psi + a\alpha\Lambda}{E\beta - \psi - a\Lambda}. \end{aligned}$$

4.3.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan E^*

Matriks Jacobian untuk titik keseimbangan $E^* = (x^*, y^*)$ adalah

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_{11} &= r \left(1 - \frac{x^*}{K} - \frac{\tau}{x^* + \varphi} \right) + rx^* \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^* + \varphi)^2} \right) - \frac{\beta y^*(1 - \xi y^*)}{\alpha + x^*(1 - \xi y^*)} \\ &\quad + \frac{\beta x^* y^* (1 - \xi y^*)^2}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^2}, \\ a_{12} &= \frac{\beta x^* (-\xi^2 x^* y^{*2} + 2\alpha \xi y^* + 2\xi x^* y^* - \alpha - x^*)}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2}, \\ a_{21} &= \frac{E\beta\alpha(1 - \xi y^*)y^*}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2}, \\ a_{22} &= \frac{E\beta x^* (\xi^2 x^* y^{*2} - 2\xi x^* y^* - 2\alpha \xi y^* + x^* + \alpha)}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2} - \psi - a\Lambda. \end{aligned}$$

Nilai eigen ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik matriks Jacobian pada titik keseimbangan E^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |J(E^*) - \lambda I| &= 0, \\ \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| &= 0, \\ \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0, \\ \left| \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0, \\ (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - (a_{21})(a_{12}) &= 0, \\ \lambda^2 + (-a_{11} - a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} &= 0, \\ \lambda^2 - (\text{tr}J(E^*))\lambda + \det J(E^*) &= 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

dengan

$$\begin{aligned}\text{tr}J(E^*) &= a_{11} + a_{22}, \\ &= \left[r \left(1 - \frac{x^*}{K} - \frac{\tau}{x^* + \varphi} \right) + rx^* \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^* + \varphi)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta y^*(1 - \xi y^*)}{\alpha + x^*(1 - \xi y^*)} + \frac{\beta x^* y^*(1 - \xi y^*)^2}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^2} \right] \\ &\quad + \left[\frac{E\beta x^*(\xi^2 x^* y^{*2} - 2\xi x^* y^* - 2\alpha \xi y^* + x^* + \alpha)}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2} - \psi - a\Lambda \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det J(E^*) &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \\ &= \left[r \left(1 - \frac{x^*}{K} - \frac{\tau}{x^* + \varphi} \right) + rx^* \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^* + \varphi)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta y^*(1 - \xi y^*)}{\alpha + x^*(1 - \xi y^*)} + \frac{\beta x^* y^*(1 - \xi y^*)^2}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^2} \right] \\ &\quad \left[\frac{E\beta x^*(\xi^2 x^* y^{*2} - 2\xi x^* y^* - 2\alpha \xi y^* + x^* + \alpha)}{(\alpha + x - \xi xy)^2} - \psi - a\Lambda \right] - \\ &\quad \left[\frac{E\beta \alpha (1 - \xi y^*) y^*}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2} \right] \left[\frac{\beta x^* (-\xi^2 x^* y^{*2} + 2\alpha \xi y^* + 2\xi x^* y^* - \alpha - x^*)}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2} \right].\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 2.5, nilai eigen pada titik kesetimbangan E^* akan bernilai negatif ($\text{Re}(\lambda) < 0$) jika $\text{tr}J(E^*) < 0$ dan $\det J(E^*) > 0$, sehingga titik kesetimbangan E^* bersifat stabil asimtotik.

Syarat eksistensi dan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (4.1) dirangkum pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Titik kesetimbangan dan syarat-syaratnya

Titik Kesetimbangan	Syarat Eksistensi Titik	Syarat Kestabilan Lokal
$E_0 = (0, 0)$	—	$\tau > \varphi$
$E^\pm = (x^\pm, 0)$	$K > \varphi,$ $(K + \varphi)^2 > 4K(\tau - \varphi)$	$S_1 > 0,$ $x^\pm < \frac{\alpha(\psi + a\Lambda)}{E\beta - \psi - \Lambda}$
$E^* = (x^*, y^*)$	$x^* > \frac{\alpha(\psi + a\Lambda)}{E\beta - \psi - a\Lambda}$	$\text{tr}J(E^*) < 0,$ $\det J(E^*) > 0$

4.4 Analisis Bifurkasi Hopf

Pada bagian ini dianalisis kemungkinan terjadinya bifurkasi Hopf di titik kesetimbangan $E^* = (x^*, y^*)$ terhadap parameter bifurkasi Λ yang mewakili parameter pemanenan *predator*. Bifurkasi Hopf pada model (4.1) dalam hal ini akan terjadi jika untuk titik kesetimbangan model (4.1) memiliki nilai eigen bernilai imajiner murni. Kondisi terjadinya bifurkasi pada model tersebut harus memenuhi syarat-syarat pada Teorema (2.6). Berikut diberikan Teorema (4.1) untuk membuktikan adanya bifurkasi Hopf pada model (4.1).

Teorema 4.1 *Syarat cukup dan syarat perlu untuk bifurkasi Hopf terjadi pada $\Lambda = \Lambda_{hb}$ pada persamaan karakteristik (4.17) di sekitar titik kesetimbangan $E^* = (x^*, y^*)$ jika memenuhi kondisi berikut:*

1. $\text{tr}J(E^*)|_{\Lambda=\Lambda_{hb}} = 0$,
2. $\det J(E^*)|_{\Lambda=\Lambda_{hb}} > 0$, dan
3. $\frac{d}{d\Lambda} [\text{tr}J(E^*)]|_{\Lambda=\Lambda_{hb}} \neq 0$.

Bukti.

1. Akan dibuktikan bahwa $\text{tr}J(E^*)|_{\Lambda=\Lambda_{hb}} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{tr} J(E^*) = & r \left(1 - \frac{x^*}{K} - \frac{\tau}{x^* + \varphi} \right) + rx^* \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^* + \varphi)^2} \right) \\ & - \frac{\beta y^*(1 - \xi y^*)}{\alpha + x^*(1 - \xi y^*)} + \frac{\beta x^* y^*(1 - \xi y^*)^2}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^2} \\ & + \frac{E\beta x^*(\xi^2 x^* y^{*2} - 2\xi x^* y^* - 2\alpha \xi y^* + x^* + \alpha)}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2} - \psi - a\Lambda. \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} T = & r \left(1 - \frac{x^*}{K} - \frac{\tau}{x^* + \varphi} \right) + rx^* \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^* + \varphi)^2} \right) \\ & - \frac{\beta y^*(1 - \xi y^*)}{\alpha + x^*(1 - \xi y^*)} + \frac{\beta x^* y^*(1 - \xi y^*)^2}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^2} \\ & + \frac{E\beta x^*(\xi^2 x^* y^{*2} - 2\xi x^* y^* - 2\alpha \xi y^* + x^* + \alpha)}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2} - \psi, \end{aligned}$$

agar $\text{tr}J(E^*) = 0$ haruslah $\Lambda = \frac{T}{a} = \Lambda_{hb}$.

2. Kondisi 2 telah dibahas pada Sub-sub bab 4.3.3.

3. Akan dibuktikan kondisi transversal $\frac{d}{d\Lambda} [\text{tr}J(E^*)] \big|_{\Lambda=\Lambda_{hb}} \neq 0$.

Misalkan $\lambda = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) menotasikan salah satu akar dari persamaan karakteristik (4.17) ketika nilai $|\Lambda - \Lambda_{hb}|$ cukup kecil dan $\lambda = iw$ ($w = \sqrt{\det J(E^*)}$) ketika $\Lambda = \Lambda_{hb}$. Substitusikan λ ke persamaan (4.17) didapat:

$$\begin{aligned} (u + iv)^2 - \text{tr}J(E^*)(u + iv) + \det J(E^*) &= 0, \\ u^2 + 2iuv - v^2 - \text{tr}J(E^*)u - \text{tr}J(E^*)iv + \det J(E^*) &= 0, \end{aligned}$$

pisahkan bagian riil dan imajiner, didapat:

$$u^2 - v^2 - \text{tr}J(E^*)u + \det J(E^*) = 0, \quad (4.18)$$

$$2uv - \text{tr}J(E^*)v = 0. \quad (4.19)$$

Turunkan persamaan (4.19) terhadap Λ dan diketahui bahwa $u = 0$ ketika $\Lambda = \Lambda_{hb}$, didapat:

$$\begin{aligned} 2uv - \text{tr}J(E^*)v &= 0, \\ 2uv &= \text{tr}J(E^*)v, \\ u &= \frac{\text{tr}J(E^*)}{2} = \frac{\frac{T}{a} - \Lambda}{2}, \\ \frac{du}{d\Lambda} &= -\frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa kondisi transversal terpenuhi. Oleh karena itu sistem (4.1) akan terjadi bifurkasi Hopf di sekitar titik kesetimbangan $E^* = (x^*, y^*)$ ketika Λ melewati nilai Λ_{hb} .

■

Selanjutnya sifat arah kestabilan solusi periodik yang timbul melalui bifurkasi Hopf ditentukan dengan menghitung bilangan Lyapunov. Bilangan Lyapunov dihitung dengan memisalkan terjadi perturbasi pada titik kesetimbangan

$E^* = (x^*, y^*)$ menjadi $x = (x_1 + x_\Lambda)|_{\Lambda=\Lambda_{hb}}$ dan $y = (y_1 + y_\Lambda)|_{\Lambda=\Lambda_{hb}}$. Ekspansi deret Taylor dari sistem (4.1) menjadi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= p_{10}x_1 + p_{01}y_1 + p_{20}x_1^2 + p_{11}x_1y_1 + p_{02}y_1^2 \\ &\quad + p_{30}x_1^3 + p_{21}x_1^2y_1 + p_{12}x_1y_1^2 + p_{03}y_1^3 + \dots, \\ \dot{y}_1 &= q_{10}x_1 + q_{01}y_1 + q_{20}x_1^2 + q_{11}x_1y_1 + q_{02}y_1^2 \\ &\quad + q_{30}x_1^3 + q_{21}x_1^2y_1 + q_{12}x_1y_1^2 + q_{03}y_1^3 + \dots.\end{aligned}$$

Koefisien p_{10}, p_{01}, q_{10} dan q_{01} merepresentasikan elemen dari matriks Jacobian pada koeksistensi titik kesetimbangan $E^* = (x^*, y^*)$ dengan nilai ambang batas Λ_{hb} . Oleh karena itu, $p_{10} + q_{01} = 0$ dan $\Delta = (p_{10}q_{01} - p_{01}q_{10}) > 0$. Ekspresi $p_{ij} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{(i+j)} F}{\partial x^i \partial y^j} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})}$ dan $q_{ij} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{(i+j)} G}{\partial x^i \partial y^j} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})}$, di mana $i, j = 0, 1, 2, 3$ (mengabaikan orde yang lebih tinggi) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}p_{10} &= \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = r \left(1 - \frac{x^*}{K} - \frac{\tau}{x^* + \varphi} \right) + rx^* \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^* + \varphi)^2} \right) \\ &\quad - \frac{\beta y^*(1 - \xi y^*)}{\alpha + x^*(1 - \xi y^*)} + \frac{\beta x^* y^*(1 - \xi y^*)^2}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^2}, \\ p_{01} &= \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{\beta x^* (-\xi^2 x^* y^{*2} + 2\alpha \xi y^* + 2\xi x^* y^* - \alpha - x^*)}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2}, \\ p_{20} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = r \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x^* + \varphi)^2} \right) - \frac{r\tau x^*}{(x^* + \varphi)^3} \\ &\quad + \frac{\beta(1 - \xi y^*)^2 y^*}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^2} - \frac{\beta x^*(1 - \xi y^*)^3 y^*}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^3}, \\ p_{11} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = -\frac{\alpha \beta (2\alpha \xi y^* + x^* \xi y^* - \alpha - x^*)}{(\xi x^* y^* - \alpha - x^*)^3}, \\ p_{02} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{E\alpha \beta \xi x^*(x^* + \alpha)}{(\xi x^* y^* - \alpha - x^*)^3}, \\ p_{30} &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = -\frac{r\tau}{(x^* + \varphi)^3} + \frac{r\tau x^*}{((x^* + \varphi)^4)} - \frac{\beta y^*(1 - \xi y^*)^3}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^3} \\ &\quad + \frac{\beta x^* y^*(1 - \xi y^*)^4}{(\alpha + x(1 - \xi y^*))^4}, \\ p_{21} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{\alpha \beta (\xi(x^* + 3\alpha)y^* - x^* - \alpha)(\xi y^* - 1)}{(\xi x^* y^* - \alpha - x^*)^4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{\alpha \beta \xi (2\alpha \xi x^* y^* + x^{*2} \xi y^* + \alpha^2 - x^{*2})}{(-\xi x^* y^* + \alpha + x^*)^4}, \\
p_{03} &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{\beta \xi^2 x^{*2}}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^2} + \frac{\beta \xi^3 x^{*3}}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^3} \\
&\quad - \frac{\beta \xi^2 x^{*3} (1 - \xi y^*)}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^3} - \frac{\beta \xi^3 x^{*4} (1 - \xi y^*)}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^4}, \\
q_{10} &= \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{E \beta \alpha (1 - \xi y^*) y^*}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2}, \\
q_{01} &= \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{E \beta x^* (\xi^2 x^* y^{*2} - 2 \xi x^* y^* - 2 \alpha \xi y^* + x^* + \alpha)}{(\alpha + x^* - \xi x^* y^*)^2} - \psi - a \Lambda, \\
q_{20} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{E \alpha \beta y^* (\xi y^* - 1)}{(\xi x^* y^* - \alpha - x^*)^3}, \\
q_{11} &= \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{E \alpha \beta (2 \alpha \xi y^* + \xi x^* y^* - \alpha - x^*)}{(\xi x^* y^* - \alpha - x^*)^3}, \\
q_{02} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{E \alpha \beta \xi x^* (x^* + \alpha)}{(\xi x^* y^* - \alpha - x^*)^3}, \\
q_{30} &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = - \frac{E \alpha \beta y^* (\xi y^* - 1)^3}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^4}, \\
q_{21} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = \frac{E \alpha \beta (\xi x^* y^* + 3 \alpha \xi y^* - x^* - \alpha) (\xi y^* - 1)}{3 (\xi x^* y^* - \alpha - x^*)^4}, \\
q_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 G}{\partial x \partial y^2} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = - \frac{2 E \alpha \beta \xi (2 \alpha \xi x^* y^* + x^{*2} \xi y^* + \alpha^2 - x^{*2})}{(-\xi x^* y^* + \alpha + x^*)^4}, \\
q_{03} &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} \Big|_{(E^*, \Lambda_{hb})} = - \frac{E \alpha \beta \xi^2 x^{*2} (\alpha + x^*)}{(\alpha + x^*(1 - \xi y^*))^4}.
\end{aligned}$$

Bilangan Lyapunov η dihitung dengan rumus pada persamaan (2.17), η menggambarkan sifat solusi periodik yang terjadi melalui bifurkasi Hopf dan diberikan oleh persamaan 4.20. Solusi periodik akan *subcritical* jika $\eta > 0$ atau akan *supercritical* jika $\eta < 0$.

$$\begin{aligned}
\eta = & -\frac{3\pi}{2p_{01}\Delta^{\frac{3}{2}}}\left\{[p_{10}q_{10}(p_{11}^2 + p_{11}q_{02} + p_{02}q_{11}) + p_{10}p_{01}(q_{11}^2 + p_{20}q_{11} + p_{11}q_{02}) \right. \\
& + q_{10}^2(p_{11}p_{02} + 2p_{02}q_{02}) - 2p_{10}q_{10}(q_{02}^2 - p_{20}p_{02}) - 2p_{10}p_{01}(p_{20}^2 - q_{20}q_{02}) \\
& - p_{01}^2(2p_{20}q_{20} + q_{11}q_{20}) + (p_{01}q_{10} - 2p_{10}^2)(q_{11}q_{02} - p_{11}p_{20})] \\
& \left. - (p_{10}^2 + p_{01}q_{10})[3(q_{10}q_{03} - p_{01}p_{30}) + 2p_{10}(p_{21} + q_{12}) + (q_{10}p_{12} - p_{01}q_{21})]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

4.5 Titik Keseimbangan Bionomik

Pada bagian ini akan dibahas titik keseimbangan bionomik pada model (4.1). Titik keseimbangan bionomik adalah kombinasi dari keseimbangan biologi dan ekonomi untuk memeriksa tingkat maksimum upaya pemanenan yang sesuai dengan biaya per unit. Misalkan b adalah konstanta biaya usaha penangkapan per unit dan p adalah harga penjualan konstan per unit biomassa *predator*. Maka, keuntungan atau pendapatan bersih (ζ) setiap saat diberikan oleh,

$$\zeta = (pay - b)\Lambda. \tag{4.21}$$

Titik keseimbangan bionomik $E_\infty = (x_\infty, y_\infty, \Lambda_\infty)$, didapat ketika kondisi biologi dan ekonomi ketika $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ dan $\zeta = 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi}\right) - \frac{\beta x(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)} = 0, \tag{4.22}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{E\beta x(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)} - \psi y - a\Lambda y = 0, \tag{4.23}$$

$$\zeta = (pay - b)\Lambda = 0. \tag{4.24}$$

Perlu diperhatikan bahwa jika biaya penangkapan *predator* lebih besar dari pada pendapatan yang diperoleh ($b > pay$), maka keuntungan yang diperoleh akan negatif. Akibatnya pemanenan akan dihentikan dan tidak ada titik keseimbangan bionomik. Oleh karena itu, untuk mendapatkan titik keseimbangan bionomik pertidaksamaan $pay > b$ harus terpenuhi.

Dari persamaan (4.24) didapatkan,

$$y_{\infty} = \frac{b}{pa}. \quad (4.25)$$

Persamaan (4.25) disubstitusikan ke persamaan (4.22) didapat,

$$\begin{aligned} rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{\beta x (1 - \xi \frac{b}{pa}) \frac{b}{pa}}{\alpha + x (1 - \xi \frac{b}{pa})} &= 0, \\ \left(rx - \frac{rx^2}{K} - \frac{r\tau x}{x + \varphi} \right) - \frac{\frac{b\beta x}{pa} - \beta \xi x \frac{b^2}{(pa)^2}}{\alpha + x - \frac{\xi b x}{pa}} &= 0, \\ \frac{K(x + \varphi)rx}{k(x + \varphi)} - \frac{rx^2(x + \varphi)}{K(x + \varphi)} - \frac{KR\tau x}{K(x + \varphi)} - \frac{\frac{b\beta x(pa - b\xi)}{(pa)^2}}{\frac{pa(\alpha + x) - b\xi x}{pa}} &= 0, \\ \frac{Krx^2 + Kr\varphi x - rx^3 - r\varphi x^2 - Kr\tau x}{K(x + \varphi)} - \frac{b\beta x(pa - \xi b)}{pa(pa\alpha + pa\alpha - b\xi x)} &= 0, \\ [Krx^2 + Kr\varphi x - rx^3 - r\varphi x^2 - Kr\tau x] [pa(pa\alpha + pa\alpha - b\xi x)] & \\ - [K(x + \varphi)] [b\beta x(pa - \xi b)] &= 0, \\ Krp^2a^2\alpha x + Kr\varphi p^2a^2\alpha - rp^2a^2\alpha x^2 - r\varphi p^2a^2\alpha x - Kr\tau p^2a^2\alpha & \\ + Krp^2a^2x^2 + Kr\varphi p^2a^2x - rp^2a^2x^3 - r\varphi p^2a^2x^2 - Kr\tau p^2a^2x - Krpab\xi x^2 & \\ - Kr\varphi pab\xi x + rpab\xi x^3 + r\varphi pab\xi x^2 + Kr\tau pab\xi x - Kb\beta pa x + Kb^2\beta \xi x & \\ - K\varphi b\beta pa + K\varphi b^2\beta \xi &= 0. \end{aligned}$$

Atau dapat ditulis menjadi

$$B_3x^3 + B_2x^2 + B_1x + B_0 = 0, \quad (4.26)$$

dengan

$$\begin{aligned} B_3 &= rp^2a^2 - rpab\xi, \\ B_2 &= rp^2a^2\alpha - Krp^2a^2 + r\varphi p^2a^2 + Krpab\xi - r\varphi pab\xi, \\ B_1 &= -Krp^2a^2\alpha + r\varphi p^2a^2\alpha - Kr\varphi p^2a^2 + Kr\tau p^2a^2 + Kr\varphi pab\xi - Kr\tau pab\xi \\ &\quad + Kb\beta pa - Kb^2\beta \xi, \\ B_0 &= -Kr\varphi p^2a^2\alpha + Kr\tau p^2a^2\alpha + K\varphi b\beta pa - K\varphi b^2\beta \xi. \end{aligned}$$

Titik x_∞ diperoleh dengan menentukan akar persamaan polinomial derajat empat (4.26), dan

$$\Lambda_\infty = \frac{1}{a} \left(\frac{E\beta x_\infty (1 - \xi \frac{b}{pa})}{\alpha + x_\infty (1 - \xi \frac{b}{pa})} - \psi \right). \quad (4.27)$$

Oleh karena itu, diperoleh titik kesetimbangan bionomik $E_\infty = (x_\infty, y_\infty, \Lambda_\infty)$ dengan $x_\infty, y_\infty, \Lambda_\infty > 0$.

4.6 Kontrol Optimal Pemanenan

Masalah mendasar dalam penentuan kontrol pemanenan yang optimal dalam komersial adalah untuk menentukan penjualan optimal antara pemanenan saat ini dan masa depan. Untuk menentukan kontrol optimal pemanenan, diberikan fungsi kontinu J terhadap waktu, yaitu

$$J(\Lambda) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \zeta(x, y, \Lambda) dt, \quad (4.28)$$

dengan $\zeta = (pay - b)\Lambda$ dan δ adalah tingkat persentase diskon tahunan.

Misalkan Λ_δ menunjukkan kontrol optimal pemanenan dengan keadaan x_δ dan y_δ yang bersesuaian. Diambil $A_\delta = (x_\delta, y_\delta, \Lambda_\delta)$ sebagai titik kesetimbangan optimal. Maka diberikan kontrol optimal Λ_δ sedemikian sehingga

$$J(\Lambda_\delta) = \max\{J(\Lambda), \Lambda \in V\},$$

di mana $V = [0, \Lambda_{\max}]$ adalah himpunan kontrol, dan $\Lambda_{\max}$ adalah batas atas upaya pemanenan.

Masalah maksimasi di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin ketika $\Lambda(t)$ berfungsi sebagai variabel kontrol dan $x(t)$ dan $y(t)$ sebagai variabel respon. Salah satu langkah awal prinsip maksimum Pontryagin adalah membentuk fungsi Hamiltonian seperti pada persamaan 2.29. Hamiltonian dari masalah kontrol optimal ini adalah

$$\begin{aligned}
H(x, y, \Lambda, \mu_1, \mu_2, t) = & e^{-\delta t}(pay - b)\Lambda \\
& + \mu_1 \left(rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x + \varphi} \right) - \frac{\beta x(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)} \right) \\
& + \mu_2 \left(\frac{E\beta x(1 - \xi y)y}{\alpha + x(1 - \xi y)} - \psi y - a\Lambda y \right)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

di mana μ_1 dan μ_2 adalah variabel adjoin.

Karena fungsi Hamiltonian (4.29) adalah persamaan linier dalam variabel kontrol μ_1 dan μ_2 , kontrol optimal harus merupakan kombinasi tunggal dari batas atas atau bawah. Kasus tunggal dapat terjadi jika

$$\frac{\partial H}{\partial \Lambda} = e^{-\delta t}(pay - b) - \mu_2 ay := \sigma(t) \tag{4.30}$$

adalah nol pada interval waktu non-trivial. Diperhatikan bahwa kontrol optimal akan berada di batas atas atau bawah jika: $\sigma(t) > 0$ atau < 0 .

Untuk menyelidiki kasus tunggal, dimisalkan $\sigma(t) = 0$ pada interval non-trivial. Dalam hal ini, kontrol optimal pemanenan adalah

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \Lambda_{\max} & \text{jika } \sigma(t) > 0 \text{ ketika } \mu_2(t)e^{\delta t} < p - \frac{b}{ay}, \\ \Lambda^* & \text{jika } \sigma(t) = 0 \text{ ketika } \mu_2(t)e^{\delta t} = p - \frac{b}{ay}, \\ 0 & \text{jika } \sigma(t) < 0 \text{ ketika } \mu_2(t)e^{\delta t} > p - \frac{b}{ay}. \end{cases}$$

Ketika $\sigma(t) = 0$, mengartikan

$$\mu_2 ay = e^{-\delta t}(pay - b) = e^{-\delta t} \frac{\partial \zeta}{\partial \Lambda}. \tag{4.31}$$

Persamaan (4.31) mengimplikasikan bahwa biaya panen per unit usaha sama dengan nilai diskon dari keuntungan marjinal di masa depan dari keuntungan usaha pada tingkat kondisi stabil (*steady-state*). Bentuk $\mu_2 e^{\delta t}$ dikenal sebagai harga bayangan panen (*shadow price*), sementara pendapatan bersih per unit pemanenan *predator* dilambangkan dengan $p - \frac{b}{ay}$.

Langkah selanjutnya dapat menyelesaikan persamaan *co-state* seperti pada

persamaan (2.31). Variabel adjoint pada masalah ini dapat ditentukan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\left[\mu_1 \left\{ r \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x+\varphi} \right) + rx \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x+\varphi)^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta y(1-\xi y)}{\alpha + x(1-\xi y)} + \frac{\beta xy(1-\xi y)^2}{(\alpha + x(1-\xi y))^2} \right\} + \mu_2 \left\{ \frac{E\beta\alpha(1-\xi y)y}{(\alpha + x - \xi xy)^2} \right\} \right].\end{aligned}\quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ &= -\left[e^{-\delta t} pa\Lambda + \mu_1 \left\{ \frac{\beta x(-\xi^2 xy^2 + 2\alpha\xi y + 2\xi xy - \alpha - x)}{(\alpha + x - \xi xy)^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \mu_2 \left\{ \frac{E\beta x(\xi^2 xy^2 - 2\alpha\xi y - 2\xi xy + \alpha + x)}{(\alpha + x - \xi xy)^2} - \psi - a\Lambda \right\} \right].\end{aligned}\quad (4.33)$$

Diasumsikan bahwa keadaan ekuilibrium dapat menjadi lintasan yang optimal; dengan demikian, dari persamaan (4.23), didapat

$$\Lambda = \frac{1}{a} \left(\frac{E\beta x(1-\xi y)}{\alpha + x(1-\xi y)} - \psi \right), \quad (4.34)$$

substitusikan persamaan (4.34) ke (4.33), diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_2}{dt} &= -e^{-\delta t} pa\Lambda - \mu_1 \left\{ \frac{\beta x(-\xi^2 xy^2 + 2\alpha\xi y + 2\xi xy - \alpha - x)}{(\alpha + x - \xi xy)^2} \right\} \\ &\quad - \mu_2 \left\{ \frac{E\beta x(\xi^2 xy^2 - 2\alpha\xi y - 2\xi xy + \alpha + x)}{(\alpha + x - \xi xy)^2} - \left(\frac{E\beta x(1-\xi y)}{\alpha + x(1-\xi y)} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Selanjutnya akan ditentukan solusi μ_2 dari persamaan (4.35). Untuk memudahkan perhitungan, dimisalkan:

$$\begin{aligned}M &= \left\{ r \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\tau}{x+\varphi} \right) + rx \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x+\varphi)^2} \right) - \frac{\beta y(1-\xi y)}{\alpha + x(1-\xi y)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta xy(1-\xi y)^2}{(\alpha + x(1-\xi y))^2} \right\},\end{aligned}$$

$$N_1 = \left\{ \frac{\alpha y}{x(\alpha + x - \xi xy)} \right\},$$

$$N_2 = \left\{ \frac{E\beta x(1 - \xi y)}{\alpha + x - \xi xy} \right\},$$

dan

$$U = \left\{ \frac{\beta x(-\xi^2 xy^2 + 2\alpha \xi y + 2\xi xy - \alpha - x)}{(\alpha + x - \xi xy)^2} \right\}.$$

Persamaan (4.32) dan (4.35) menjadi

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -\mu_1 \{M\} - \mu_2 \{N_1 N_2\}, \quad (4.36)$$

$$\frac{d\mu_2}{dt} = -e^{-\delta t} pa\Lambda - \mu_1 \{U\} + \mu_2 \{EU + N_2\}. \quad (4.37)$$

Ubah persamaan (4.37) menjadi persamaan diferensial orde dua dan eliminasi variabel adjoin μ_1 , persamaan (4.37) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mu_2}{dt^2} &= \delta e^{-\delta t} pa\Lambda - \frac{d\mu_1}{dt} \{U\} + \frac{d\mu_2}{dt} \{EU + N_2\}, \\ \frac{d^2\mu_2}{dt^2} &= \delta e^{-\delta t} pa\Lambda - [-\mu_1 \{M\} - \mu_2 \{N_1 N_2\}] \{U\} + \frac{d\mu_2}{dt} \{EU + N_2\}, \\ \frac{d^2\mu_2}{dt^2} &= \delta e^{-\delta t} pa\Lambda - \left[\left\{ \frac{d\mu_2}{dt} + e^{-\delta t} la\Lambda - \mu_2 \{EU + N_2\} \right\} \frac{M}{U} - \mu_2 \{N_1 N_2\} \right] U, \\ &\quad + \frac{d\mu_2}{dt} \{EU + N_2\} \\ \frac{d^2\mu_2}{dt^2} &= \delta e^{-\delta t} pa\Lambda - \frac{d\mu_2}{dt} M - e^{-\delta t} pa\Lambda M + \mu_2 (EMU + MN_2) + \mu_2 (N_1 N_2 U) \\ &\quad + \frac{d\mu_2}{dt} \{EU + N_2\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Dengan memperkenalkan operator diferensial $D \equiv \frac{d}{dt}$, persamaan (4.38) dapat ditransforasi ke bentuk operator menjadi

$$\left\{ D^2 - D[EU + N_2 - M] - [EMU + MN_2 + N_1 N_2 U] \right\} \mu_2 = P e^{-\delta t}, \quad (4.39)$$

di mana $P = pa\Lambda(\delta - M)$. Persamaan (4.39) adalah persamaan diferensial biasa

nonhomogen orde dua, dan persamaan karakteristiknya:

$$r^2 - r[EU + N_2 - M] - [EMU + MN_2 + N_1N_2U] = 0. \quad (4.40)$$

Jadi solusi dari persamaan diferensial (4.39), yang menggabungkan solusi homogen dan solusi khusus adalah

$$\mu_2(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{P}{Q} e^{-\delta t}, \quad (4.41)$$

dengan C_1 dan C_2 adalah sebarang konstanta dan

$$Q = \delta^2 + \delta[EU + N_2 - M] - [EMU + MN_2 + N_1N_2U] \neq 0.$$

Dari persamaan (4.41) variabel adjoin $\mu_2(t)$ akan selalu terbatas jika dan hanya jika $r_1 < 0$ dan $r_2 < 0$ atau $C_1 = C_2 = 0$, oleh karena itu

$$\mu_2(t) = \frac{P}{Q} e^{-\delta t}, \quad (4.42)$$

dan harga bayangan (*shadow price*) pemanenan *predator* adalah

$$e^{\delta t} \mu_2(t) = \frac{P}{Q}. \quad (4.43)$$

Selanjutnya akan ditentukan kontrol tunggal dari kesetimbangan optimal. Ini terjadi ketika variabel kontrol $\Lambda(t)$ tidak bernilai 0 atau $\Lambda_{\max}$. Untuk mendapatkan solusi kesetimbangan optimal untuk sistem (4.1) dalam bentuk $(x_\delta, y_\delta, \Lambda_\delta)$, substitusi persamaan (4.42) ke (4.30) ketika $\frac{\partial H}{\partial \Lambda} = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} e^{-\delta t}(pay - b) - \mu_2 ay &= 0 \\ e^{-\delta t}(pay - b) - \left(\frac{P}{Q} e^{-\delta t}\right) ay &= 0 \\ e^{-\delta t}(pay) - e^{-\delta t}b - e^{-\delta t}ay \frac{P}{Q} &= 0 \\ ay \left(p - \frac{P}{Q}\right) - b &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Selanjutnya, mengingat kembali persamaan ekonomi (4.21) dalam bentuk

$$\begin{aligned}
 \zeta(x, y, \Lambda) &= (pay - b)\Lambda \\
 &= \frac{P}{Q}ay\Lambda \\
 &= \frac{pa^2\Lambda^2(\delta - M)y}{\delta^2 + \delta[EU + N_2 - M] - [EMU + MN_2 + N_1N_2U]}, \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

dapat dilihat bahwa, ketika $\delta \rightarrow \infty$, menghasilkan $\frac{P}{Q} \rightarrow 0$ yang mengakibatkan keuntungan atau pendapatan bersih $\zeta = 0$. Namun, ketika $\delta \rightarrow 0$, ζ meningkat. Dengan kata lain, pendapatan bersih sangat tergantung pada tingkat diskon, karena kegiatan pemanenan berhenti ketika tingkat diskon tidak terbatas, sementara tingkat diskon nol menimbulkan maksimalisasi dari pendapatan bersih.

4.7 Simulasi Numerik

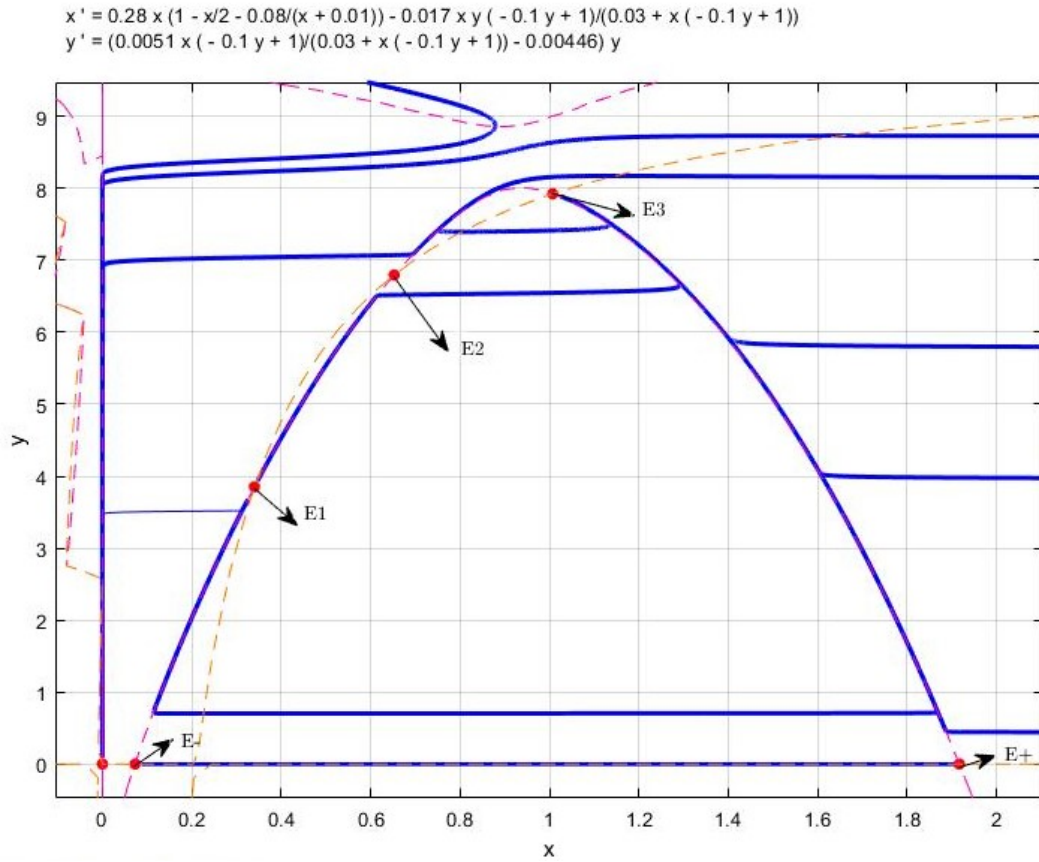
Simulasi numerik dilakukan untuk menggambarkan secara numerik model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey* dan pemanenan *predator*. Model disimulasikan dengan menggunakan MATLAB R2021a dan dijalankan dengan nilai parameter yang telah dipilih dan juga di uji menggunakan Maple 2021. Nilai-nilai parameter yang dipilih tersebut memenuhi syarat-syarat kestabilan lokal masing-masing titik kesetimbangan pada Tabel 4.1. Hasil uji nilai parameter dapat dilihat pada Lampiran 1.

Beberapa nilai parameter yang telah diuji dan akan digunakan pada simulasi numerik disajikan pada Tabel 4.2

Tabel 4.2 Nilai-nilai parameter dan satuannya

Parameter	Nilai	Keterangan	Satuan
x	—	Populasi prey	Massa
y	—	Populasi pemangsa	Massa
r	0.28	Tingkat pertumbuhan mangsa	Waktu ⁻¹
K	2	Daya dukung lingkungan	Massa
τ	0.08	Ambang kelangsungan hidup mangsa	Massa
β	0.07	Tingkat konsumsi predator	Waktu ⁻¹
ξ	0.1	Koefisien perlindungan prey	Massa
α	0.03	Konstanta setengah saturasi	Massa
E	0.3	Efisiensi konversi	—
ψ	0.004	Tingkat kematian alami <i>predator</i>	Waktu ⁻¹
a	0.1	Koefisien daya tangkap <i>predator</i>	Massa
Λ	0.0046	Tingkat pemanenen <i>predator</i>	Massa
φ	0.01	Parameter bantu	Massa

Adapun potret fase model *predator-prey* dengan nilai parameter pada Tabel 4.2 diperlihatkan pada Gambar 4.2. Diketahui terdapat enam titik kesetimbangan pada simulasi model (4.1) yakni: titik E_0 , titik E^- , titik E^+ , titik E_1^* , titik E_2^* dan titik E_3^* . Keenam titik kesetimbangan akan disimulasikan untuk mengetahui kestabilan masing-masing titik kesetimbangan.



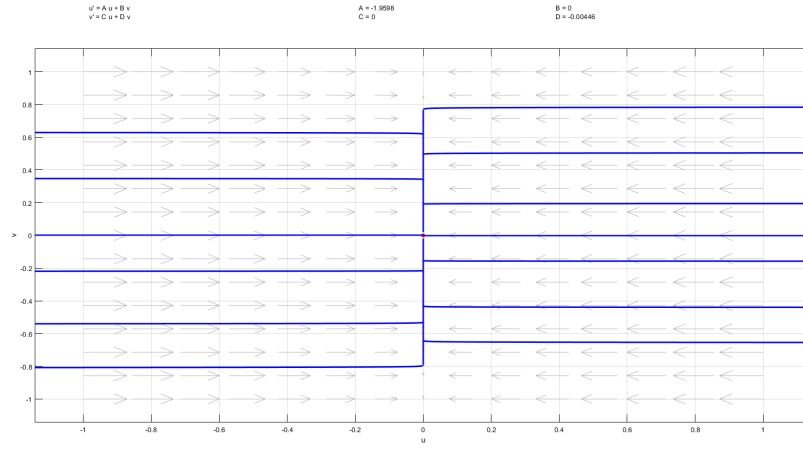
Gambar 4.2 Potret fase model *predator-prey*

4.7.1 Simulasi Numerik Kestabilan Titik Keseimbangan E_0

Simulasi numerik untuk memperlihatkan kestabilan titik kesetimbangan $E_0 = (0, 0)$, dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.2. Nilai parameter tersebut telah memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan E_0 yaitu bersifat stabil jika

$$\tau = 0.08 > 0.01 = \varphi.$$

Hasil linearisasi dari simulasi numerik titik kesetimbangan E_0 dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 4.2 adalah sebagai berikut:



Gambar 4.3 Potret fase model *predator-prey* di titik E_0

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa arah potret fase menuju titik E_0 yang berarti titik kesetimbangan $E_0 = (0, 0)$ eksis dan bersifat stabil asimtotik.

4.7.2 Simulasi Numerik Kestabilan Titik Kesetimbangan $E^\pm$

Simulasi numerik titik kesetimbangan $E^\pm$ dilakukan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 4.2, yang telah diuji dan memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan $E^\pm = (x^\pm, 0)$ pada Tabel 4.1 yaitu,

$$x^- \approx 0.1 < 2.3 = \frac{\alpha(\psi + a\Lambda)}{E\beta - \psi - \Lambda},$$

$$S_1^- = -0.005590807556 < 0$$

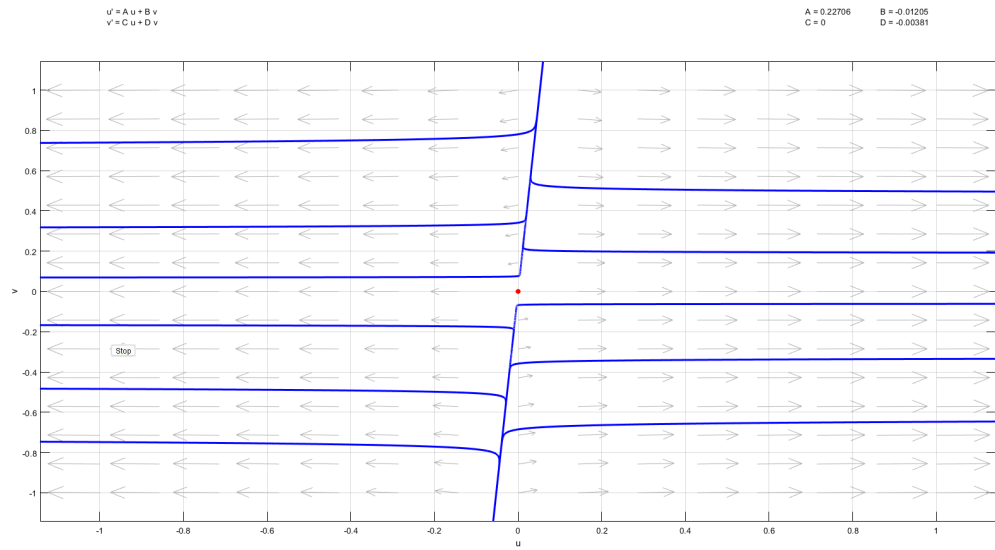
dan

$$x^+ \approx 2 < 2.3 = \frac{\alpha(\psi + a\Lambda)}{E\beta - \psi - \Lambda},$$

$$S_1^+ = 3.405922693 > 0.$$

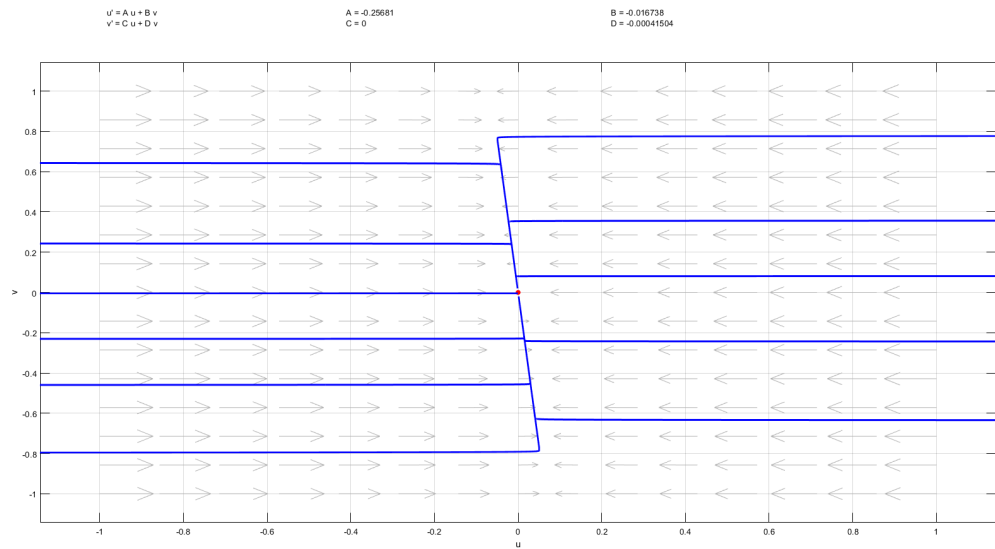
Hasil uji nilai parameter untuk simulasi numerik titik kesetimbangan $E^\pm$ dapat dilihat pada Lampiran 1.

Hasil linearisasi dari simulasi numerik titik kesetimbangan $E^\pm$ dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 4.2 dan $\alpha = 0.5$ adalah sebagai berikut:



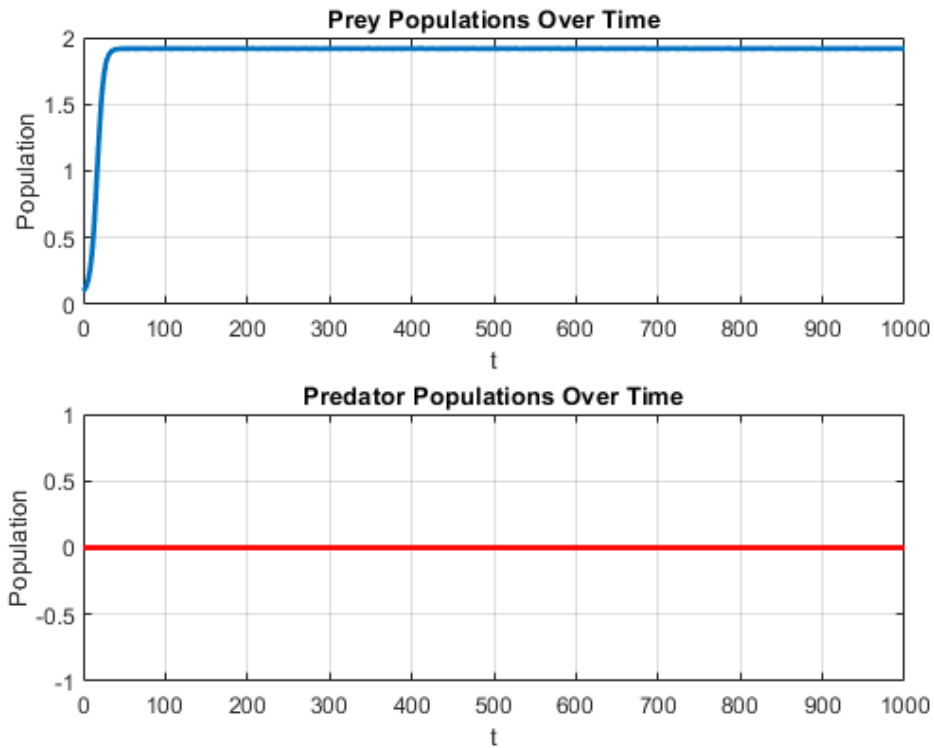
Gambar 4.4 Potret fase model *predator-prey* di titik E^-

Gambar 4.4 menunjukkan bahwa arah potret fase menjauh dari titik E^- yang berarti titik kesetimbangan $E^- = (0.073032, 0)$ eksis dan bersifat tidak stabil.



Gambar 4.5 Potret fase model *predator-prey* di titik E^+

Gambar 4.5 menunjukkan bahwa arah potret fase menuju titik E^+ yang berarti titik kesetimbangan $E^+ = (1.917, 0)$ eksis dan bersifat stabil asimtotik.



Gambar 4.6 Simulasi deret waktu *prey* (x) dan *predator* (y) terhadap waktu (t) dengan parameter pada Tabel 4.2 di titik $E^\pm$

Gambar 4.6 menunjukkan dengan seiring berjalannya waktu ($t \rightarrow \infty$), maka populasi *prey* dapat lestari dengan jumlah yang stabil yaitu $x^+ = 1.917$, sedangkan pada populasi *predator* mengalami kepunahan yaitu $y^+ = 0$ atau $E^+(x^+, 0) = (1.917, 0)$.

4.7.3 Simulasi Numerik Kestabilan titik Kesetimbangan E^*

Simulasi numerik titik kesetimbangan E^* dilakukan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 4.2, yang telah diuji dan memenuhi syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan $E^* = (x^*, y^*)$ pada Tabel 4.1 yaitu,

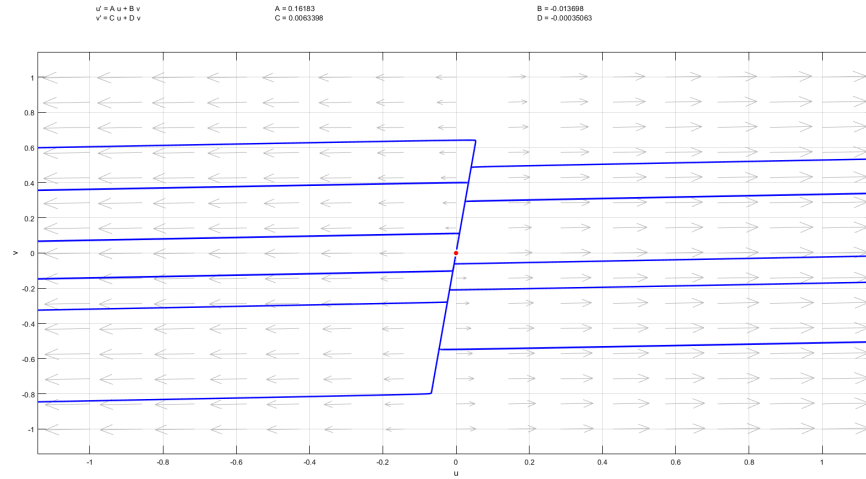
$$\text{tr}J(E^*) = -0.0135267 < 0$$

dan

$$\det J(E^*) = 0.0000515 > 0.$$

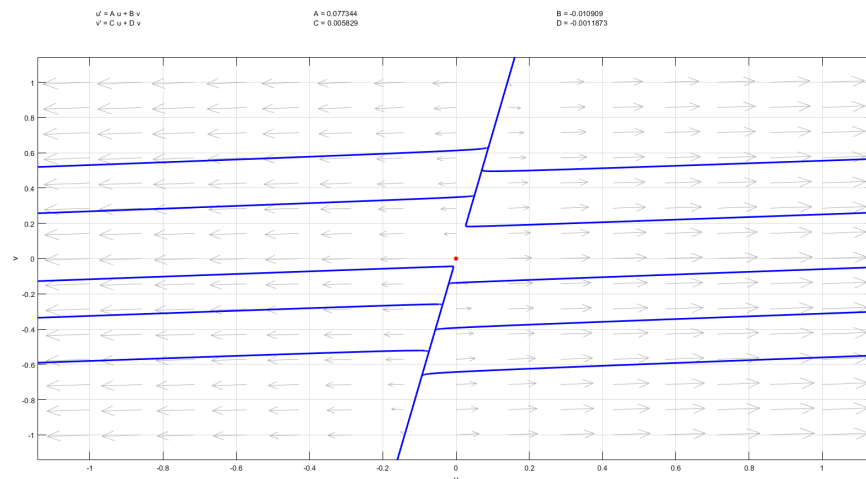
Hasil uji nilai parameter untuk simulasi numerik titik kesetimbangan E^* dapat dilihat pada Lampiran 1.

Hasil linearisasi dari simulasi numerik titik kesetimbangan E^* dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 4.2 adalah sebagai berikut:



Gambar 4.7 Potret fase model *predator-prey* di titik E_1^*

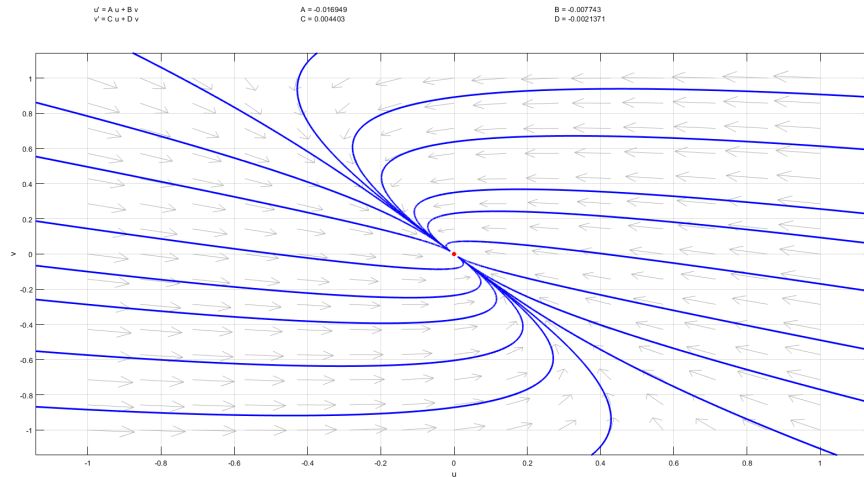
Gambar 4.7 menunjukkan bahwa arah potret fase menjauh dari titik E_1^* yang berarti titik kesetimbangan $E_1^* = (0.34003, 3.8517)$ eksis dan bersifat tidak stabil.



Gambar 4.8 Potret fase model *predator-prey* di titik E_2^*

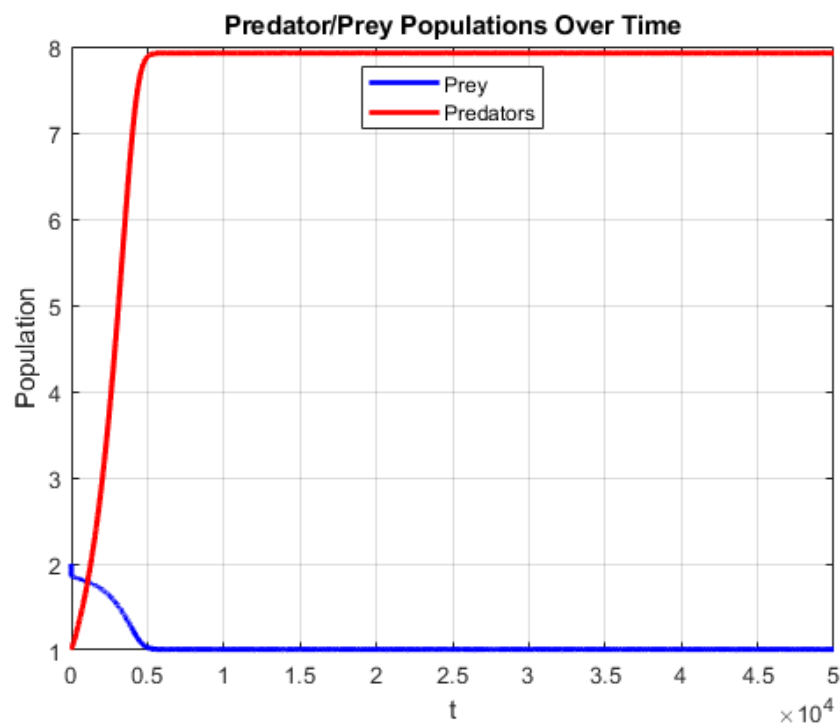
Gambar 4.8 menunjukkan bahwa arah potret fase menjauh dari titik E_2^* yang berarti

titik kesetimbangan $E_2^* = (0.65255, 6.7962)$ eksis dan bersifat tidak stabil.



Gambar 4.9 Potret fase model *predator-prey* di titik E_3^*

Gambar 4.9 menunjukkan bahwa arah potret fase menuju titik E_3^* yang berarti titik kesetimbangan $E_3^* = (1.0073, 7.9246)$ eksis dan bersifat stabil asimtotik.

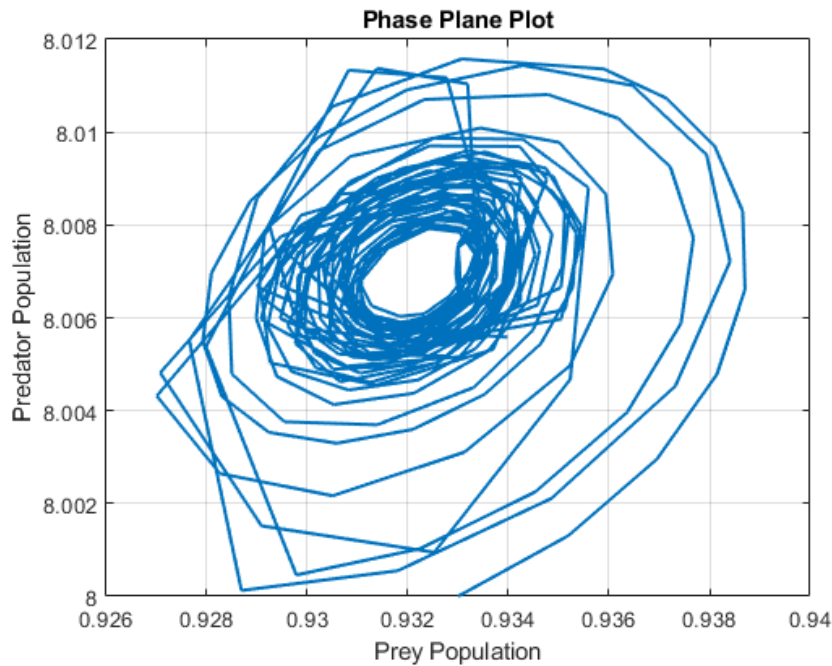


Gambar 4.10 Simulasi deret waktu *prey* (x) dan *predator* (y) terhadap waktu (t) dengan parameter pada Tabel 4.2 di titik E^*

Gambar 4.10 menunjukkan dengan seiring berjalannya waktu ($t \rightarrow \infty$), maka populasi *prey* dan *predator* dapat lestari dan selamat dari kepunahan dengan jumlah yang stabil berturut-turut $x^* = 1.0073$ dan $y^* = 7.9246$ atau $E^*(x^*, y^*) = (1.0073, 7.9246)$. Untuk nilai $\Lambda = 0.00391 > \Lambda_{hb}$ dan nilai awal di sekitar titik E_3^* yaitu $(0.933, 8)$, diperoleh perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan E^* seperti pada Gambar 4.11 menunjukkan munculnya *limit cycle* yang stabil. Kehadiran *limit cycle* yang stabil setelah parameter bifurkasi melewati nilai Λ_{hb} menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf.

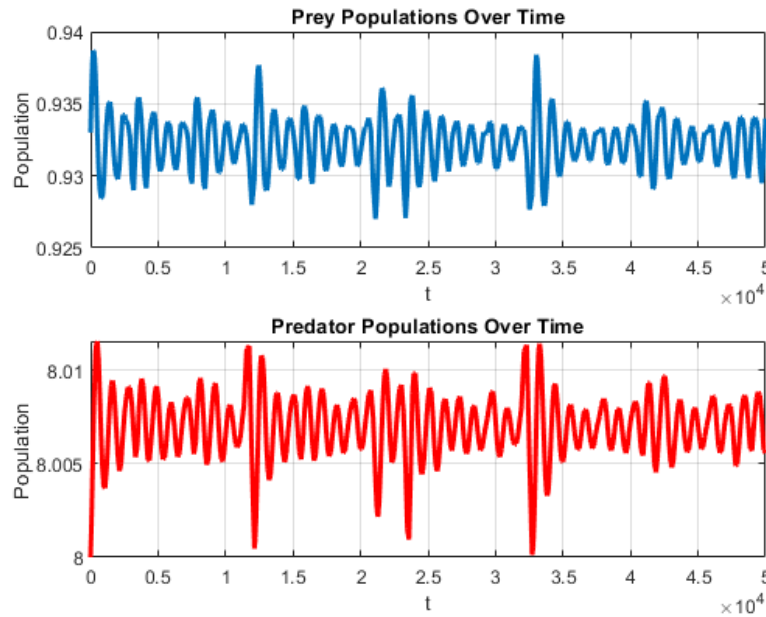
4.7.4 Simulasi Bifurkasi Hopf

Pada simulasi terjadinya birfurkasi Hopf dilakukan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 4.2 dengan syarat bifurkasi Hopf pada Teorema 4.1 di sekitar titik kesetimbangan E^* dengan nilai kritikal $\Lambda_{hb} = 0.0039$.



Gambar 4.11 Potret fase munculnya *limit cycle* pada sistem dengan $\Lambda = 0.00391$

Gambar 4.11 menunjukkan perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan E^* . Kehadiran *limit cycle* setelah parameter bifurkasi melewati nilai Λ_{hb} menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf.



Gambar 4.12 Simulasi deret waktu model *predator-prey* terhadap waktu dengan $\Lambda = 0.00391$

Dengan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 4.2, nilai bilangan Lyapunov adalah $\eta = -15553.59015 < 0$ yang berarti solusi periodik yang terjadi pada Gambar 4.11 merupakan bifurkasi Hopf *supercritical*. Hasil uji numerik bilangan Lyapunov η dapat dilihat pada Lampiran 2. Fenomena ini menunjukkan bahwa kedua populasi dapat hidup berdampingan dengan populasi yang berubah secara periodik. Untuk lebih jelasnya, perubahan populasi yang berubah secara periodik ditunjukkan pada Gambar 4.12 dengan nilai awal (0.933, 8).

4.7.5 Simulasi Titik Keseimbangan Bionomik

Pada bagian ini, dilakukan simulasi numerik titik keseimbangan bionomik pada persamaan biologi (4.1) dan persamaan ekonomi (4.21). Simulasi dilakukan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 4.2 dan $p = 5$, $b = 1.5$.

Titik keseimbangan bionomik di simulasikan dengan merubah parameter τ , φ dan ξ yang berbeda-beda untuk memeriksa hubungan antara upaya pemanenan *predator*, efek Allee dan perlindungan *prey*. Eksistensi titik keseimbangan bionomik dengan parameter efek Allee dan perlindungan *prey* yang berbeda secara berurutan ditunjukkan pada Tabel 4.3 dan 4.4.

Tabel 4.3 Eksistensi titik kesetimbangan bionomik dengan parameter efek Allee yang berbeda

τ	φ	x_∞	y_∞	Λ_∞
0	0	1.802604	3	0.009816
0.01	0.1	1.790751	3	0.009808
0.08	0.01	1.696868	3	0.009744
0.1	0.05	1.671291	3	0.009725
0.3	0.07	1.280384	3	0.009348
0.3	0.01	1.229828	3	0.009282

Pada Tabel 4.3 terlihat bahwa kepadatan populasi *prey* menurun ketika semakin membesarnya τ , kepadatan populasi *predator* stabil di $y_\infty = 3$, dan upaya pemanenan *predator* Λ_∞ stabil di 0.009. Dengan kata lain, semakin kuat efek Alleenya maka semakin menurun populasi *prey*. Sedangkan untuk Tabel 4.4 terlihat bahwa semakin kecil nilai ξ atau perlindungan *prey* maka semakin besar upaya pemanenan *predator*. Ini menghasilkan kesimpulan yang diharapkan bahwa semakin kecil perlindungan *prey* maka semakin besar upaya pemanenan *predator*. Hasil uji numerik perhitungan titik kesetimbangan bionomik dapat dilihat pada Lampiran 3.

Tabel 4.4 Eksistensi titik kesetimbangan bionomik dengan nilai ξ yang berbeda

ξ	x_∞	y_∞	Λ_∞
0.001	1.694987	3	0.010110
0.01	1.695111	3	0.010086
0.05	1.695758	3	0.009960
0.1	1.696868	3	0.009743
0.2	1.701447	3	0.008846
0.5	1.728363	3	0.003457

4.7.6 Simulasi Kontrol Optimal Pemanenan

Selanjutnya disimulasikan kontrol optimal pemanenan *predator* pada persamaan biologi (4.1) dan kontrol tunggal dari kesetimbangan optimal pada persamaan (4.44). Simulasi dilakukan dengan memainkan parameter diskon tahunan (δ) yang berbeda-beda untuk mengetahui perubahan fungsi keuntungan (ζ) terhadap pemanenan *predator* (Λ). Simulasi dilakukan menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 4.2 dan $p = 5$, $b = 1.5$. Adapun hasil simulasi kontrol optimal pemanenan *predator* ditunjukkan pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Kontrol optimal pemanenan *predator* dengan tingkat diskon δ yang berbeda

δ	(x^*, y^*, Λ^*)	$\frac{\partial \zeta}{\partial \Lambda}$
0.005	(1.636780, 3.690509, 0.00956030)	0.34525442
0.01	(1.669783, 3.317937, 0.00966464)	0.15896875
0.1	(1.694396, 3.029478, 0.00973667)	0.01473881
10	(1.696844, 3.000292, 0.00974357)	0.00014617
50	(1.696863, 3.000058, 0.00974363)	0.00002923

Pada Tabel 4.5 terlihat bahwa perubahan fungsi keuntungan terhadap pemanenan *predator* akan menurun ketika semakin membesarnya δ . Dengan kata lain semakin kecil diskon tahunan (δ) maka akan semakin besar keuntungan yang didapat. Ini menghasilkan kesimpulan yang sama dengan perhitungan analitik pada Sub bab 4.6 dan realita di dunia nyata. Hasil uji numerik perhitungan kontrol optimal pemanenan dapat dilihat pada Lampiran 4.

BAB 5

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Penentuan titik kesetimbangan menunjukkan bahwa model *predator-prey* dengan pengaruh efek Allee, perlindungan *prey*, dan pemanenan *predator* memiliki tiga titik kesetimbangan. Adapun tiga titik kesetimbangan tersebut antara lain titik kesetimbangan E_0 yang merupakan titik kepunahan bagi *prey* dan *predator*, titik kesetimbangan $E^\pm$ yang merupakan titik kepunahan bagi *predator*, dan titik kesetimbangan E^* yang merupakan titik kelestarian bagi *prey* dan *predator*.
2. Analisis kestabilan pada titik kesetimbangan E_0 bersifat stabil jika terjadi efek Allee kuat pada laju pertumbuhan populasi *prey*, titik kesetimbangan $E^\pm$ bersifat stabil jika $x^\pm < \frac{\alpha\psi + a\alpha\Lambda}{E\beta - \psi - a\Lambda}$, dan titik kesetimbangan E^* bersifat stabil jika $\text{tr}J(E^*) < 0$ dan $\det J(E^*) > 0$.
3. Bifurkasi Hopf terjadi di titik kesetimbangan E^* terhadap parameter bifurkasi Λ yang mewakili parameter pemanenan *predator*, ketika Λ melewati nilai kritis $\Lambda_{hb} = 0.0039$. Nilai bilangan Lyapunov adalah $\eta = -15553.59015 < 0$ yang berarti sifat bifurkasi Hopf adalah *supercritical*.
4. Penentuan titik kesetimbangan bionomik akan eksis jika keuntungan atau laba bersih pemanenan lebih besar daripada biaya pemanenan ($pay > b$).
5. Kontrol pemanenan optimal dibahas untuk memaksimalkan keuntungan tanpa menyebabkan kepunahan populasi *predator*. Kontrol pemanenan optimal dianalisis menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Telah ditunjukkan bahwa, semakin besar tingkat diskon ($\delta \rightarrow \infty$) maka semakin kecil keuntungan ($\zeta = 0$). Dengan kata lain, tingkat diskon nol menghasilkan keuntungan atau pendapatan bersih maksimum.
6. Simulasi numerik telah dilakukan dan menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis pada titik kesetimbangan.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya, dapat dilakukan analisis terjadinya bifurkasi *saddle-node* atau bifurkasi Bogdanov-Takens pada parameter yang lain. Selain itu, dapat dilakukan penelitian lainnya dengan memodifikasi model seperti menggunakan fungsi respon Holling tipe III ataupun menerapkan efek Allee di kedua populasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Allee, W. C. (1931). *Animal aggregations: a study in general sociology*. University of Chicago Press.
- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. (2000). *CHAOS: An Introduction to Dynamical System*. Springer-Verlag. New York.
- Ang, T. K., Safuan, H. M., Sidhu, H. S., Jovanoski, Z., & Towers, I. N. (2019). Impact of Harvesting on a Bioeconomic Predator-Prey Fishery Model Subject to Environmental Toxicant. *Bulletin of mathematical biology*, Vol. 81, No. 7, pp. 2748–2767.
- Arsyad, S.H., Resmawan, dan Achmad, Novianita. (2020). Analisis Model Predator-Prey Leslie-Gower Dengan Pemberian Racun Pada Predator. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*. Vol. 4, No. 1, pp. 1-6.
- Barnes, B. dan Fulford, G.R. (2014). *Mathematical Modelling with Case Studies: Using Maple and MATLAB, Third Edition*. Chapman and Hall/CRC.
- Belkhodja, K., Moussaoui, Ali dan Alaoui, Adil. (2018). Optimal harvesting and stability for a prey–predator model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. Vol. 31, pp. 321-336.
- Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C. (2008). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Ninth Edition*. New York: Department of Mathematical Sciences Rensselaer Polytechnic Institute.
- Brauer, F. dan Chavez, C.C. (2012). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Second Edition*. New York: Springer.
- Cai, Y., Zhao, C., Wang, W., dan Wang, J. (2015). Dynamics of a Leslie–Gower predator–prey model with additive Allee effect. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 39, pp. 2092-2106.
- Chen, Wenchang. (2022). Stability and Bifurcation Analysis of a Predator-Prey Model with Michaelis-Menten Type Prey Harvesting. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. Vol. 10, pp. 504-526.
- Courchamp, F., T. Clutton, and B. Grenfell. (1999). Inverse Density Dependence and Allee Effect. *Trends Ecol*. Vol. 14, pp. 405– 410.
- Fauzi, Akhmad dan Anna, Suzy. (2005). *Pemodelan Sumber Daya Perikanan dan Kelautan Untuk Analisis Kebijakan*. Jakarta : Gramedia Pustaka Utama.

- Finizio, N. dan G. Ladas. (1982). *An Introduction to Differential Equation*. Wadsworth Publishing Company Belmont. California.
- Goode, Stephen.W. dan Annin, Scott A. (2017). *Differential Equations and Linear Algebra, Fourth Edition*. California State University, Fullerton: New York.
- Haque, Md. Manarul dan Sarwardi, Sahabuddin. (2018). Dynamics of a Harvested Prey–Predator Model with Prey Refuge Dependent on Both Species. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 28, No. 12.
- Hassell, M. P. (1978). *The dynamics of arthropod predator–prey systems*. Princeton University Press. Princeton, NJ.
- Kant, S. and Kumar, V. (2017). Stability analysis of predator–prey system with migrating prey and disease infection in both species. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 42, pp. 509–539.
- Mezouaghi, Abdelheq & Djilali, Salih & Bentout, Soufiane & Biroud, Kheireddine. (2022). Bifurcation analysis of a diffusive predator-prey model with prey social behavior and predator harvesting. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. Vol. 45, No. 2, pp. 718-731.
- Molla, H., Rahman, M.S., dan Sarwardi, S. (2020). Dynamical study of a prey–predator model incorporating nonlinear prey refuge and additive Allee effect acting on prey species. *Modeling Earth Systems and Environment*, Vol. 7, pp. 749 - 765.
- Molla, H., Sarwardi, Sahabuddin., Smith, Stacey R. dan Haque, M. (2022). Dynamics of adding variable prey refuge and an Allee effect to a predator–prey model. *Alexandria Engineering Journal*. Vol. 61, No. 6, pp. 4175-4188.
- Murray, G.P.D., R.A. Stillman, R.E. Gozlan, and J.R. Britton. (2013). Experimental Predictions of The Functional Response of a Freshwater Fish. *Ethology*, Vol. 119, No. 9, pp. 751–761.
- Nagle, R. K., Saff, E. B., dan Snider, A. D. (2012). *Fundamentals of Differential Equations, Second Edition*. Pearson Education, Inc. Boston.
- Odenbaugh, Jay. (2019). *ECOLOGICAL MODELS*. Cambridge University Press.
- Pal, A. K. dan Samanta, G. P. (2010). Stability Analysis of an Eco-Epidemiological Model Incorporating a Prey Refuge. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. Vol. 15, No. 4, pp. 473-491.

- Panigoro, H.S., dan Savitri, D. (2020). Bifurkasi Hopf pada Model Lotka-Volterra Orde-Fraksional dengan Efek Allee Aditif pada Predator. *Jambura Journal of Biomathematics*. Vol.1, No.1, pp.16-24.
- Perko, Lawrence. (2001). *Differential Equations and Dynamical System, Third Edition*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Ra'yan, Syarif I., Toaha, Syamsuddin dan Kusuma, jeffry. (2022). Analisis Dinamik Model Mangsa Pemangsa dengan Efek Allee Ganda dan Fungsi Respon Holling Tipe II. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*. Vol. 18, No. 3, pp. 434-446.
- Reece, J. B. and N. A. Campbell. (2011). *Biology, 9th ed*. Pearson. Australia.
- Robinson, R.C. (2004). *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete, International Edition*. Pearson Education, Inc. New Jersey.
- Subiono. (2013). *Sistem Linier dan Kontrol Optimal*. Jurusan Matematika FMIPA-ITS, Surabaya.
- Stephens, P.A. dan Sutherland, W.J. (1999). Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation. *Trends Ecol. Evol.* Vol. 14, pp. 401–405.
- Waluya, S.B. (2011). *An Introduction to Ordinary Differential Equations, Second Edition*. Semarang: Unnes Press.
- Zhou, Y., Sun, W., Song, Y. et al. (2019). Hopf bifurcation analysis of a predator–prey model with Holling-II type functional response and a prey refuge. *Nonlinear Dyn.* Vol. 97, pp. 1439–1450.
- Zhuang, K. dan Wen, Z. (2011). Dynamical Behaviors in a Discrete Predator-Prey Model With a Prey Refuge. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. Vol. 5, No.4, pp. 195-197.
- Zill, Dennis G. (2012). *A FIRST COURSE IN DIFFERENTIAL EQUATIONS with Modeling Applications, Tenth Edition*.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Uji parameter syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan

```

> r := 0.28;
  K := 2;
  tau := 0.08;
  varphi := 0.01;
  beta := 0.017;
  xi := 0.1;
  alpha := 0.03;
  E := 0.3;
  psi := 0.004;
  a := 0.1;
  Lambda := 0.002;

```

$$\begin{aligned}
 r &:= 0.28 \\
 K &:= 2 \\
 \tau &:= 0.08 \\
 \varphi &:= 0.01 \\
 \beta &:= 0.017 \\
 \xi &:= 0.1 \\
 \alpha &:= 0.03 \\
 E &:= 0.3 \\
 \psi &:= 0.004 \\
 a &:= 0.1 \\
 \Lambda &:= 0.002
 \end{aligned} \tag{1}$$

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan $E^\pm$

```

> S_1^- := (0.073032)^3 - \left(\frac{K}{2} - 2 \cdot \text{varphi}\right) \cdot (0.073032)^2 - \text{varphi} \cdot (K - \text{varphi}) \cdot (0.073032)
      + \frac{K \cdot \text{varphi}}{2} \cdot (\text{tau} - \text{varphi})

```

$$S_1^- := -0.005590807556 \tag{2}$$

```

> S_1^+ := (1.917)^3 - \left(\frac{K}{2} - 2 \cdot \text{varphi}\right) \cdot (1.917)^2 - \text{varphi} \cdot (K - \text{varphi}) \cdot (1.917) + \frac{K \cdot \text{varphi}}{2} \cdot (\text{tau} - \text{varphi})

```

$$S_1^+ := 3.405922693 \tag{3}$$

```

> \frac{E \cdot \text{beta} \cdot (0.073032)}{0.5 + 0.073032} - \text{psi} - a \cdot \text{Lambda}

```

$$-0.003550013263 \tag{4}$$

```

> \frac{E \cdot \text{beta} \cdot (1.917)}{0.5 + 1.917} - \text{psi} - a \cdot \text{Lambda}

```

$$-0.000155026893 \tag{5}$$

```

> \frac{0.5 \cdot \text{psi} + 0.5 \cdot a \cdot \text{Lambda}}{E \cdot \text{beta} - \text{psi} - a \cdot \text{Lambda}}

```

$$2.333333333 \tag{6}$$

Lampiran 1 Uji parameter untuk syarat kestabilan lokal titik kesetimbangan
(lanjutan)

Analisis kestabilan titik kesetimbangan E^*

$$\begin{aligned} > a_{-}[11] := r \cdot \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{\text{tau}}{x + \text{varphi}} \right) + r \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{K} + \frac{\text{tau}}{(x + (\text{varphi}))^2} \right) \\ &\quad - \frac{\text{beta} \cdot y \cdot (1 - \text{xi} \cdot y)}{\alpha + x \cdot (1 - \text{xi} \cdot y)} + \frac{\text{beta} \cdot x \cdot y \cdot (1 - \text{xi} \cdot y)^2}{(\alpha + x \cdot (1 - \text{xi} \cdot y))^2} \\ &\quad a_{-11} := -0.0124166526 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} > a_{-}[12] := \frac{\beta x \xi y}{\alpha + x(-\xi y + 1)} - \frac{\beta x(-\xi y + 1)}{\alpha + x(-\xi y + 1)} - \frac{\beta x^2(-\xi y + 1)y\xi}{(\alpha + x(-\xi y + 1))^2} \\ &\quad a_{-12} := -0.01029974490 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} > a_{-}[21] := \left(\frac{E \cdot \text{beta} \cdot (1 - \text{xi} \cdot y)}{\alpha + x \cdot (1 - \text{xi} \cdot y)} - \frac{E \cdot \text{beta} \cdot x \cdot (1 - \text{xi} \cdot y)^2}{(\alpha + x \cdot (1 - \text{xi} \cdot y))^2} \right) \cdot y \\ &\quad a_{-21} := 0.003659119898 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} > a_{-}[22] := \left(-\frac{E \cdot \text{beta} \cdot x \cdot \text{xi}}{\alpha + x \cdot (1 - \text{xi} \cdot y)} + \frac{E \cdot \text{beta} \cdot x^2 \cdot \text{xi} \cdot (1 - \text{xi} \cdot y)}{(\alpha + x \cdot (1 - \text{xi} \cdot y))^2} \right) \cdot y \\ &\quad + \frac{E \cdot \text{beta} \cdot x \cdot (1 - \text{xi} \cdot y)}{\alpha + x \cdot (1 - \text{xi} \cdot y)} - \text{psi} - a \cdot \text{Lambda} \\ &\quad a_{-22} := -0.001110076529 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} > tr := a_{-}[11] + a_{-}[22] \\ &\quad tr := -0.01352672913 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} > det := a_{-}[11] \cdot a_{-}[22] - a_{-}[12] \cdot a_{-}[21] \\ &\quad det := 0.00005147143613 \end{aligned} \tag{11}$$

Lampiran 2 Bilangan Lyapunov η

Bilangan Lyapunov η

```
> r := 0.28;
   K := 2;
   tau := 0.08;
   varphi := 0.01;
   beta := 0.017;
   xi := 0.1;
   alpha := 0.03;
   E := 0.3;
   psi := 0.004;
   a := 0.1;
   Lambda := 0.0046;
   x := 1; y := 7.9;
```

$r := 0.28$

$K := 2$

$\tau := 0.08$

$\varphi := 0.01$

$\beta := 0.017$

$\xi := 0.1$

$\alpha := 0.03$

$E := 0.3$

$\psi := 0.004$

$a := 0.1$

$\Lambda := 0.0046$

$x := 1$

$y := 7.9$

(1)

```
> f := r * x * (1 - x/K - tau/(x + phi)) - beta * x * (1 - xi * y) * y /
   alpha + x * (1 - xi * y)
   f := 0.0003092822
```

(2)

```
> g := (E * beta * x * (1 - xi * y) / alpha + x * (1 - xi * y) - psi - a * Lambda) * y
   g := 0.0000197500000
```

(3)

```
> p[10] := r * (1 - x/K - tau/(x + phi)) + r * x * (-1/K + tau/(x + phi)^2) - beta * (-xi * y + 1) * y /
   alpha + x * (-xi * y + 1)
   + beta * x * (-xi * y + 1)^2 * y / (alpha + x * (-xi * y + 1))^2
   p10 := -0.0149086488
```

(4)

```
> p[01] := beta * x * xi * y / alpha + x * (-xi * y + 1) - beta * x^2 * (-xi * y + 1) * y * xi /
   (alpha + x * (-xi * y + 1))^2
```

(5)

Lampiran 2 Bilangan Lyapunov η (lanjutan)

$$p_1 := -0.00788020834 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} > p[20] := 2r \left(-\frac{1}{K} + \frac{\tau}{(x+\varphi)^2} \right) - \frac{2rx\tau}{(x+\varphi)^3} + \frac{2\beta(-\xi y+1)^2 y}{(\alpha+x(-\xi y+1))^2} \\ & - \frac{2\beta x(-\xi y+1)^3 y}{(\alpha+x(-\xi y+1))^3} \end{aligned}$$

$$p_{20} := -0.2538593162 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} > p[11] := \frac{\beta \xi y}{\alpha+x(-\xi y+1)} - \frac{\beta(-\xi y+1)}{\alpha+x(-\xi y+1)} - \frac{3\beta(-\xi y+1)yx\xi}{(\alpha+x(-\xi y+1))^2} \\ & + \frac{\beta x(-\xi y+1)^2}{(\alpha+x(-\xi y+1))^2} + \frac{2\beta x^2(-\xi y+1)^2 y \xi}{(\alpha+x(-\xi y+1))^3} \end{aligned}$$

$$p_{11} := -0.00710546878 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} > p[02] := \frac{2\beta x \xi}{\alpha+x(-\xi y+1)} + \frac{2\beta x^2 \xi^2 y}{(\alpha+x(-\xi y+1))^2} - \frac{2\beta x^2(-\xi y+1)\xi}{(\alpha+x(-\xi y+1))^2} \\ & - \frac{2\beta x^3(-\xi y+1)y\xi^2}{(\alpha+x(-\xi y+1))^3} \end{aligned}$$

$$p_2 := 0.00759982640 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} > p[30] := -\frac{6r\tau}{(x+\varphi)^3} + \frac{6rx\tau}{(x+\varphi)^4} - \frac{6\beta(-\xi y+1)^3 y}{(\alpha+x(-\xi y+1))^3} + \frac{6\beta x(-\xi y+1)^4 y}{(\alpha+x(-\xi y+1))^4} \end{aligned}$$

$$p_{30} := -0.0687694385 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} > p[21] := -\frac{4\beta(-\xi y+1)y\xi}{(\alpha+x(-\xi y+1))^2} + \frac{2\beta(-\xi y+1)^2}{(\alpha+x(-\xi y+1))^2} + \frac{10\beta(-\xi y+1)^2 y x \xi}{(\alpha+x(-\xi y+1))^3} \\ & - \frac{2\beta x(-\xi y+1)^3}{(\alpha+x(-\xi y+1))^3} - \frac{6\beta x^2(-\xi y+1)^3 y \xi}{(\alpha+x(-\xi y+1))^4} \end{aligned}$$

$$p_{21} := 0.0109044596 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} > p[12] := \frac{2\beta \xi}{\alpha+x(-\xi y+1)} + \frac{4\beta \xi^2 y x}{(\alpha+x(-\xi y+1))^2} - \frac{6\beta(-\xi y+1)x\xi}{(\alpha+x(-\xi y+1))^2} \\ & - \frac{10\beta(-\xi y+1)yx^2\xi^2}{(\alpha+x(-\xi y+1))^3} + \frac{4\beta x^2(-\xi y+1)^2 \xi}{(\alpha+x(-\xi y+1))^3} + \frac{6\beta x^3(-\xi y+1)^2 y \xi^2}{(\alpha+x(-\xi y+1))^4} \end{aligned}$$

$$p_{12} := -0.0049712456 \quad (11)$$

$$> p[03] := \frac{6\beta x^2 \xi^2}{(\alpha+x(-\xi y+1))^2} + \frac{6\beta x^3 \xi^3 y}{(\alpha+x(-\xi y+1))^3} - \frac{6\beta x^3(-\xi y+1)\xi^2}{(\alpha+x(-\xi y+1))^3}$$

Lampiran 2 Bilangan Lyapunov η (lanjutan)

$$- \frac{6 \beta x^4 (-\xi y + 1) y \xi^3}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^4} \quad p_3 := 0.00949978298 \quad (12)$$

$$> q[10] := \left(\frac{E \beta (-\xi y + 1)}{\alpha + x (-\xi y + 1)} - \frac{E \beta x (-\xi y + 1)^2}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} \right) y \quad q_{10} := 0.004406718750 \quad (13)$$

$$> q[01] := \left(-\frac{E \beta x \xi}{\alpha + x (-\xi y + 1)} + \frac{E \beta x^2 (-\xi y + 1) \xi}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} \right) y + \frac{E \beta x (-\xi y + 1)}{\alpha + x (-\xi y + 1)} - \psi - a \Lambda \quad q_1 := -0.002095937500 \quad (14)$$

$$> q[20] := \left(-\frac{2 E \beta (-\xi y + 1)^2}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} + \frac{2 E \beta x (-\xi y + 1)^3}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^3} \right) y \quad q_{20} := -0.007711757820 \quad (15)$$

$$> q[11] := \left(-\frac{E \beta \xi}{\alpha + x (-\xi y + 1)} + \frac{3 E \beta (-\xi y + 1) x \xi}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} - \frac{2 E \beta x^2 (-\xi y + 1)^2 \xi}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^3} \right) y + \frac{E \beta (-\xi y + 1)}{\alpha + x (-\xi y + 1)} - \frac{E \beta x (-\xi y + 1)^2}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} \quad q_{11} := 0.002131640625 \quad (16)$$

$$> q[02] := \left(-\frac{2 E \beta x^2 \xi^2}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} + \frac{2 E \beta x^3 (-\xi y + 1) \xi^2}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^3} \right) y - \frac{2 E \beta x \xi}{\alpha + x (-\xi y + 1)} + \frac{2 E \beta x^2 (-\xi y + 1) \xi}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} \quad q_2 := -0.002279947911 \quad (17)$$

$$> q[30] := \left(\frac{6 E \beta (-\xi y + 1)^3}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^3} - \frac{6 E \beta x (-\xi y + 1)^4}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^4} \right) y \quad q_{30} := 0.02024336424 \quad (18)$$

$$> q[21] := \left(\frac{4 E \beta (-\xi y + 1) \xi}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} - \frac{10 E \beta (-\xi y + 1)^2 x \xi}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^3} + \frac{6 E \beta x^2 (-\xi y + 1)^3 \xi}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^4} \right) y - \frac{2 E \beta (-\xi y + 1)^2}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} + \frac{2 E \beta x (-\xi y + 1)^3}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^3} \quad q_{21} := -0.003271337906 \quad (19)$$

$$> q[12] := \left(-\frac{4 E \beta \xi^2 x}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} + \frac{10 E \beta (-\xi y + 1) x^2 \xi^2}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^3} \right)$$

Lampiran 2 Bilangan Lyapunov η (lanjutan)

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & - \frac{6 E \beta x^3 (-\xi y + 1)^2 \xi^2}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^4} \right) y - \frac{2 E \beta \xi}{\alpha + x (-\xi y + 1)} + \frac{6 E \beta (-\xi y + 1) x \xi}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} \\
 & - \frac{4 E \beta x^2 (-\xi y + 1)^2 \xi}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^3}
 \end{aligned} \right\} q_{12} := 0.001491373697 \quad (20) \\
 & > q[03] := \left(- \frac{6 E \beta x^3 \xi^3}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^3} + \frac{6 E \beta x^4 (-\xi y + 1) \xi^3}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^4} \right) y - \frac{6 E \beta x^2 \xi^2}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^2} \\
 & + \frac{6 E \beta x^3 (-\xi y + 1) \xi^2}{(\alpha + x (-\xi y + 1))^3} \\
 & & q_3 := -0.002849934901 \quad (21) \\
 & > \text{eta} := - \frac{3 \cdot \text{Pi}}{2 \cdot p[01] \cdot (p[10] \cdot q[01] - p[01] \cdot q[10])^{\frac{3}{2}} \cdot ((p[10] \cdot q[10] \cdot (p[11]^2 + p[11] \cdot q[02] \\
 & + p[02] \cdot q[11]) + p[10] \cdot p[01] \cdot (q[11]^2 + p[20] \cdot q[11] + p[11] \cdot q[02]) + q[10]^2 \\
 & \cdot (p[11] \cdot p[02] + 2 \cdot p[02] \cdot q[02]) - 2 \cdot p[10] \cdot q[10] \cdot (q[02]^2 - p[20] \cdot p[02]) - 2 \\
 & \cdot p[10] \cdot p[01] \cdot (p[20]^2 - q[20] \cdot q[02]) - p[01]^2 \cdot (2 \cdot p[20] \cdot q[20] + q[11] \cdot q[20]) \\
 & + (p[01] \cdot q[10] - 2 \cdot p[10]^2) \cdot (q[11] \cdot q[02] - p[11] \cdot p[20])) - (p[10]^2 + p[01] \\
 & \cdot q[10]) \cdot (3 \cdot (q[10] \cdot q[03] - p[01] \cdot p[30]) + 2 \cdot p[10] \cdot (p[21] + q[12]) + (q[10] \\
 & \cdot p[12] - p[01] \cdot q[21])))) \quad \eta := -15553.59015 \quad (22)
 \end{aligned}$$

Lampiran 3 Perhitungan titik kesetimbangan bionomik

```

> r := 0.28;
  K := 2;
  tau := 0.3; varphi := 0.01;
  beta := 0.017;
  xi := 0.1;
  alpha := 0.03;
  E := 0.3;
  psi := 0.004; a := 0.1; p := 5; b := 1.5;

```

$$\begin{aligned}
 r &:= 0.28 \\
 K &:= 2 \\
 \tau &:= 0.3 \\
 \varphi &:= 0.01 \\
 \beta &:= 0.017 \\
 \xi &:= 0.1 \\
 \alpha &:= 0.03 \\
 E &:= 0.3 \\
 \psi &:= 0.004 \\
 a &:= 0.1 \\
 p &:= 5 \\
 b &:= 1.5
 \end{aligned} \tag{1}$$

```

> f := r*x*(1 - x/K - tau/(x + varphi)) - beta*x*y*(1 - xi*y)/
    alpha + x*(1 - xi*y)

```

$$f := 0.28x \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{0.3}{x + 0.01} \right) - \frac{0.017xy(-0.1y + 1)}{0.03 + x(-0.1y + 1)} \tag{2}$$

```

> g := (E*beta*x*(1 - xi*y)/alpha + x*(1 - xi*y) - psi - a*Lambda)*y

```

$$g := \left(\frac{0.0051x(-0.1y + 1)}{0.03 + x(-0.1y + 1)} - 0.004 - 0.1\Lambda \right) y \tag{3}$$

```

> zeta := (p*a*y - b)*Lambda

```

$$\zeta := (0.5y - 1.5)\Lambda \tag{4}$$

```

> solve({f, g, zeta}, {x, y, Lambda})

```

$$\begin{aligned}
 &\{\Lambda = 0., x = 0., y = 0.\}, \{\Lambda = -0.04000000000, x = 0., y = 3.\}, \{\Lambda = 0., x = 0.3546680548, y = 0.\}, \\
 &\{\Lambda = 0., x = 1.635331945, y = 0.\}, \{\Lambda = 0.008237265474, x = 0.7482844832, y = 3.\}, \{\Lambda \\
 &= 0.009282596003, x = 1.229827846, y = 3.\}, \{\Lambda = -0.1728639609, x = -0.03096947180, y \\
 &= 3.\}, \{\Lambda = 0., x = 0.07785774343, y = -4.011568315\}, \{\Lambda = 0., x = 0.9608308515 \\
 &+ 0.6918114639 I, y = 9.252261494 + 0.5383820368 I\}, \{\Lambda = 0., x = -0.009519446455, y \\
 &= 124.5979544\}, \{\Lambda = 0., x = 0.9608308515 - 0.6918114639 I, y = 9.252261494 \\
 &- 0.5383820368 I\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Lampiran 4 Kontrol pemanenan optimal

```

> r := 0.28;
  K := 2;
  tau := 0.08;
  varphi := 0.01;
  beta := 0.017;
  xi := 0.1;
  alpha := 0.03;
  E := 0.3;
  psi := 0.004;
  a := 0.1;
  delta := 50;
  p := 5;
  b := 1.5;

                                r := 0.28
                                K := 2
                                τ := 0.08
                                φ := 0.01
                                β := 0.017
                                ξ := 0.1
                                α := 0.03
                                E := 0.3
                                ψ := 0.004
                                a := 0.1
                                δ := 50
                                p := 5
                                b := 1.5
(1)

> f := r·x·(1 - x/K - tau/(x + varphi)) - beta·x·y·(1 - xi·y)/
    alpha + x·(1 - xi·y)
    f := 0.28 x (1 - x/2 - 0.08/(x + 0.01)) - 0.017 x y (-0.1 y + 1)/
    0.03 + x (-0.1 y + 1)
(2)

> g := (E·beta·x·(1 - xi·y)/alpha + x·(1 - xi·y) - psi - a·Lambda)·y
    g := (0.0051 x (-0.1 y + 1)/(0.03 + x (-0.1 y + 1)) - 0.004 - 0.1 Λ) y
(3)

> M := diff(f, x)
M := 0.28 - 0.1400000000 x - 0.0224/(x + 0.01) + 0.28 x (-1/2 + 0.08/(x + 0.01)^2)
    - 0.017 y (-0.1 y + 1)/(0.03 + x (-0.1 y + 1)) + 0.017 x y (-0.1 y + 1)^2/(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2
(4)

```


Lampiran 4 Kontrol pemanenan optimal (lanjutan)

$$\begin{aligned} & \triangleright N1 := \frac{y \cdot \alpha}{x \cdot (\alpha + x - xi \cdot x \cdot y)} \\ & \quad N1 := \frac{0.03 y}{x (-0.1 x y + x + 0.03)} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \triangleright N2 := \frac{E \cdot \beta \cdot x \cdot (1 - xi \cdot y)}{\alpha + x \cdot (1 - xi \cdot y)} \\ & \quad N2 := \frac{0.0051 x (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \triangleright U := \frac{\beta \cdot x \cdot (-\xi^2 \cdot x \cdot y^2 + 2 \cdot \alpha \cdot xi \cdot y + 2 \cdot xi \cdot x \cdot y - \alpha - x)}{(\alpha + x \cdot (1 - xi \cdot y))^2} \\ & \quad U := \frac{0.017 x (-0.01 x y^2 + 0.2 x y - x + 0.006 y - 0.03)}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \triangleright P := p \cdot a \cdot \text{Lambda} \cdot (\delta - M) \\ & P := 0.5 \Lambda \left(49.72 + 0.1400000000 x + \frac{0.0224}{x + 0.01} - 0.28 x \left(-\frac{1}{2} + \frac{0.08}{(x + 0.01)^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{0.017 y (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} - \frac{0.017 x y (-0.1 y + 1)^2}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \triangleright Q := \delta^2 + \delta \cdot (E \cdot U + N2 - M) - (E \cdot M \cdot U + M \cdot N2 + N1 \cdot N2 \cdot U) \\ & Q := 2486.00 + \frac{0.2550 x (-0.01 x y^2 + 0.2 x y - x + 0.006 y - 0.03)}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} + 7.000000000 x \\ & \quad + \frac{1.1200}{x + 0.01} - 14.00 x \left(-\frac{1}{2} + \frac{0.08}{(x + 0.01)^2} \right) + \frac{0.850 y (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} \\ & \quad - \frac{0.850 x y (-0.1 y + 1)^2}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} + \frac{0.2550 x (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} \\ & \quad - \frac{1}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} \left(0.0051 \left(0.28 - 0.1400000000 x - \frac{0.0224}{x + 0.01} + 0.28 x \left(-\frac{1}{2} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{0.08}{(x + 0.01)^2} \right) - \frac{0.017 y (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} + \frac{0.017 x y (-0.1 y + 1)^2}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} \right) x (-0.01 x y^2 \\ & \quad \left. + 0.2 x y - x + 0.006 y - 0.03) \right) \\ & \quad - \frac{2.601 \times 10^{-6} y x (-0.1 y + 1) (-0.01 x y^2 + 0.2 x y - x + 0.006 y - 0.03)}{(-0.1 x y + x + 0.03) (0.03 + x (-0.1 y + 1))^3} \\ & \quad - \frac{1}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} \left(0.0051 \left(0.28 - 0.1400000000 x - \frac{0.0224}{x + 0.01} + 0.28 x \left(-\frac{1}{2} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{0.08}{(x + 0.01)^2} \right) - \frac{0.017 y (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} + \frac{0.017 x y (-0.1 y + 1)^2}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} \right) x (-0.1 y \end{aligned} \quad (9)$$

Lampiran 4 Kontrol pemanenan optimal (lanjutan)

$$\begin{aligned}
 & + 1) \Big) \\
 & \triangleright h := a \cdot y \cdot \left(p - \frac{P}{Q} \right) - b \\
 & h := 0.1 y \left(5 - \left(0.5 \Lambda \left(49.72 + 0.1400000000 x + \frac{0.0224}{x + 0.01} - 0.28 x \left(-\frac{1}{2} \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{0.08}{(x + 0.01)^2} \right) + \frac{0.017 y (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} - \frac{0.017 x y (-0.1 y + 1)^2}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} \right) \right) \Bigg/ \\
 & \quad \left(2486.00 + \frac{0.2550 x (-0.01 x y^2 + 0.2 x y - x + 0.006 y - 0.03)}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} + 7.000000000 x \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1.1200}{x + 0.01} - 14.00 x \left(-\frac{1}{2} + \frac{0.08}{(x + 0.01)^2} \right) + \frac{0.850 y (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{0.850 x y (-0.1 y + 1)^2}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} + \frac{0.2550 x (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} \left(0.0051 \left(0.28 - 0.1400000000 x - \frac{0.0224}{x + 0.01} + 0.28 x \left(-\frac{1}{2} \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{0.08}{(x + 0.01)^2} \right) - \frac{0.017 y (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} + \frac{0.017 x y (-0.1 y + 1)^2}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} \right) x \left(\right. \\
 & \quad \left. - 0.01 x y^2 + 0.2 x y - x + 0.006 y - 0.03 \right) \Bigg) \\
 & \quad - \frac{2.601 \times 10^{-6} y x (-0.1 y + 1) (-0.01 x y^2 + 0.2 x y - x + 0.006 y - 0.03)}{(-0.1 x y + x + 0.03) (0.03 + x (-0.1 y + 1))^3} \\
 & \quad - \frac{1}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} \left(0.0051 \left(0.28 - 0.1400000000 x - \frac{0.0224}{x + 0.01} + 0.28 x \left(-\frac{1}{2} \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{0.08}{(x + 0.01)^2} \right) - \frac{0.017 y (-0.1 y + 1)}{0.03 + x (-0.1 y + 1)} + \frac{0.017 x y (-0.1 y + 1)^2}{(0.03 + x (-0.1 y + 1))^2} \right) x (-0.1 y \right.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Lampiran 4 Kontrol pemanenan optimal (lanjutan)

$$\begin{aligned}
 & + 1) \Big) \Big) \Big) - 1.5 \\
 & \text{> solve}(\{f, g, h\}, \{x, y, \text{Lambda}\}) \\
 & \{\Lambda = -0.04000000000, x = 0., y = 2.999760019\}, \{\Lambda = 0.004040998786, x = 0.2712282778, y \\
 & = 3.000024246\}, \{\Lambda = 0.009743630465, x = 1.696863560, y = 3.000058463\}, \{\Lambda \\
 & = -0.1094853005 - 0.4230878053 \text{ I}, x = 3.547656817 + 1.989188435 \text{ I}, y = 10.06631557 \\
 & - 0.02775470697 \text{ I}\}, \{\Lambda = 0.3477956996 + 0.3248992692 \text{ I}, x = -0.2111291428 \\
 & + 3.150533307 \text{ I}, y = 9.985976350 - 0.1017509450 \text{ I}\}, \{\Lambda = -0.03177056957 \\
 & - 0.01534349034 \text{ I}, x = -0.009804047164 + 0.002177423458 \text{ I}, y = 14.10069404 \\
 & - 10.68621274 \text{ I}\}, \{\Lambda = -0.06784127311 + 0.03742882661 \text{ I}, x = -0.009685343809 \\
 & + 0.001929005870 \text{ I}, y = -5.552404152 + 4.665052457 \text{ I}\}, \{\Lambda = 0.01134957251 \\
 & + 5.977411605 \text{ I}, x = -0.01000011191 + 5.619562922 \times 10^{-6} \text{ I}, y = -19.99981359 \\
 & + 0.2391023738 \text{ I}\}, \{\Lambda = -0.08878919804, x = -0.02095223296, y = 2.999467315\}, \{\Lambda \\
 & = -501.3659597, x = -0.02999770462, y = 0.0002520912158\}, \{\Lambda = 1.874888175, x \\
 & = -0.03061954004, y = -0.06575038406\}, \{\Lambda = -0.5695134052, x = -2.649195695, y \\
 & = 9.896706755\}, \{\Lambda = -1339.334198, x = -177.5592607, y = 9.998310488\}, \{\Lambda \\
 & = 0.01100000033, x = -177.5714280, y = -262598.1211\}, \{\Lambda = 0.01134957251 \\
 & - 5.977411605 \text{ I}, x = -0.01000011191 - 5.619562922 \times 10^{-6} \text{ I}, y = -19.99981359 \\
 & - 0.2391023738 \text{ I}\}, \{\Lambda = -0.06784127311 - 0.03742882661 \text{ I}, x = -0.009685343809 \\
 & - 0.001929005870 \text{ I}, y = -5.552404152 - 4.665052457 \text{ I}\}, \{\Lambda = -0.03177056957 \\
 & + 0.01534349034 \text{ I}, x = -0.009804047164 - 0.002177423458 \text{ I}, y = 14.10069404 \\
 & + 10.68621274 \text{ I}\}, \{\Lambda = 0.3477956996 - 0.3248992692 \text{ I}, x = -0.2111291428 \\
 & - 3.150533307 \text{ I}, y = 9.985976350 + 0.1017509450 \text{ I}\}, \{\Lambda = -0.1094853005 \\
 & + 0.4230878053 \text{ I}, x = 3.547656817 - 1.989188435 \text{ I}, y = 10.06631557 + 0.02775470697 \text{ I}\}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Lampiran 5 Program MATLAB bifurkasi Hopf di titik E_3^* dengan $\Lambda = 0.00391$

```
% Parameter
clear all;
clc;
close all;

r=0.28;
K=2;
tau=0.08;
varphi=0.01;
beta=0.017;
xi=0.1;
alpha=0.03;
E=0.3;
psi=0.004;
a=0.1;
Lambda=0.00391;

% Model Predator-Prey
f = @(t, x) [r.*x(1).*(1-x(1)/K -tau./(x(1)+varphi))-(
    beta*x(1).*(1-xi*x(2)).*x(2))./(alpha+x(1).*(1-xi*x
    (2)))]; ((E*beta*x(1).*(1-xi*x(2)))./(alpha+x(1).*(1-
    xi*x(2)))-psi-a*Lambda).*x(2)];

% Grafik potret fase
t0 = 0;
tfinal = 50000;
x0 = [0.933;8];
[t,x] = ode45(f,[t0 tfinal],x0);

figure(1);
```

```
subplot(2,1,1)
plot(t, x(:,1), 'linewidth', 2)
title('Prey Populations Over Time')
xlabel('t')
ylabel('Population')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t, x(:,2), 'r', 'linewidth', 2)
title('Predator Populations Over Time')
xlabel('t')
ylabel('Population')
grid on

figure(2);
plot(x(:,1), x(:,2), 'linewidth', 1.5)
title('Phase Plane Plot')
xlabel('Prey Population')
ylabel('Predator Population')
grid on
```

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Taqriri Kamal Mulyadi lahir pada tanggal 29 Agustus 2001 di Samarinda, Kalimantan Timur. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Mulyadi dan Ibu Yuliana. Penulis memulai pendidikan di TK Darul Falah 3 Samarinda pada tahun 2005 dan lulus pada tahun 2006. Kemudian penulis masuk ke pendidikan dasar di SDN 016 Sungai Kunjang dan lulus pada tahun 2013. Lulus sekolah dasar, penulis melanjutkan ke pendidikan jenjang menengah pertama di SMPN 5 Samarinda dan lulus pada tahun 2016. Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikan di SMAN 3 Samarinda dan dinyatakan lulus pada tahun 2019.

Penulis masuk pendidikan tinggi pada tahun 2019 di Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman melalui Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Selama masa perkuliahan, penulis aktif mengikuti organisasi internal kampus antara lain adalah sebagai anggota bidang Sosial Masyarakat dan bidang Keilmuan dari Keluarga Mahasiswa Matematika Universitas Mulawarman (Gammatika Unmul). Penulis pernah mengikuti beberapa kegiatan atau kompetisi khusus mahasiswa, di antaranya adalah Program Kreativitas Mahasiswa (PKM) pada tahun 2022, seleksi nasional Olimpiade Nasional Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (ONMIPA PT) di tahun 2022, dan Juara 3 Lomba Kalkulus dan Kombinatorika tingkat mahasiswa se-Indonesia yang diselenggarakan oleh Keluarga Mahasiswa Matematika FMIPA Unmul di tahun 2023. Pada Tahun 2022, penulis melaksanakan pengabdian masyarakat berupa Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kelurahan Bukuan, Kecamatan Palaran, Kota Samarinda, serta melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Bank Syariah Indonesia Kantor Cabang Antasari Kota Samarinda.